Isogones d'une ellipse, un exemple

Nous avons vu dans un sujet précédent que l'ensemble des points du plan d'où l'on peut mener deux tangentes à une parabole faisant un angle constant est, en général, une hyperbole.

On peut imaginer que l'ensemble des points du plan d'où l'on peut mener deux tangentes à une ellipse faisant un angle constant est peut-être, en général, une ellipse. Cette conjecture est-elle exacte ? Nous allons mener une petite enquête. Nous prendrons pour exemple l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ *et nous allons chercher ses isogones.*

Cette enquête va permettre de réinvestir quelques techniques propres au second degré (discriminant, signe du trinôme, relations entre coefficients et racines, …).

Il est prudent aussi de se munir d'un logiciel de calcul formel et d'un autre de représentations graphiques.

1. Le sujet.

Le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par (E) l'ellipse d'équation cartésienne $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. Soit I un point du plan, de coordonnées $(a\,;\,b)$. Pour tout réel k, on désigne par D_k la droite de coefficient directeur k passant par I.

1. Ecrire une équation cartésienne de la droite D_k.

2. Vérifier que l'abscisse d'un point d'intersection de D_k et de (E) est solution de l'équation :

$$\frac{(4k^2+1)}{4}x^2-2(k(ka-b))x+(k^2a^2-2kab+b^2-1)=0$$

3.1. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que cette équation ait une solution double est que $(4-a^2)k^2+2kab+1-b^2=0$

3.2. Que se passe-t-il si $a=\pm 2$?

3.3. Montrer que, si I est extérieur à l'ellipse, alors il passe par I deux tangentes à l'ellipse distinctes.

4. Exprimer alors en fonction de a et de b les coefficients directeurs des deux tangentes à l'ellipse issues de I.

5. Déterminer l'ensemble (C) des points du plan d'où l'on peut mener à l'ellipse deux tangentes perpendiculaires.

6. Soit I un point extérieur à l'ellipse, d'abscisse distincte de 2 et de -2 et non situé sur (C). Exprimer en fonction de a et de b la tangente de l'angle géométrique des deux tangentes passant par I.

7. Soit θ un réel tel que $0<\theta<\frac{\pi}{2}$. Montrer que si l'angle des deux tangentes passant par I a pour mesure θ, alors : $\tan^2\theta.\left(x^2+y^2-5\right)^2_{\text{gjulia}}-4\left(x^2+4\left(y^2-1\right)\right)=0$. Soit (Γ) la courbe définie par cette équation.

La conjecture « *L'ensemble des points du plan d'où l'on peut mener deux tangentes à une ellipse faisant un angle constant est, en général, une ellipse* » est-elle exacte ?

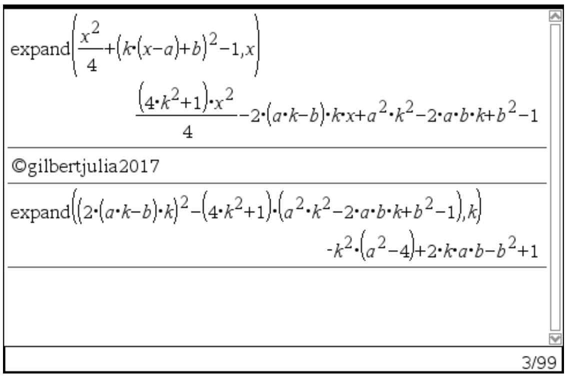
8. On suppose dans cette question que $\theta=\frac{\pi}{4}$**.** Montrer que (Γ) est la réunion des quatre courbes d'équations respectives : $y=\sqrt{13-x^2+2\sqrt{32-3x^2}}$; $y=-\sqrt{13-x^2+2\sqrt{32-3x^2}}$; $y=\sqrt{13-x^2-2\sqrt{32-3x^2}}$; $y=-\sqrt{13-x^2-2\sqrt{32-3x^2}}$, courbes que l'on représentera.

2. Eléments de correction.

Soit $I\ (a\,;b)$ un point du plan.
La droite D_k passant par I et ayant pour coefficient directeur k a pour équation : $y-b=k(x-a)$.

Les coordonnées d'un éventuel point d'intersection de D_k avec l'ellipse sont solution du système d'équations : $\begin{cases} y-b=k(x-a) \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$

L'abscisse d'un point d'intersection avec l'ellipse est solution de l'équation : $\dfrac{x^2}{4}+\left(k(x-a)+b\right)^2-1=0$
c'est-à-dire de **(1)** : $\dfrac{\left(4k^2+1\right)}{4}x^2-2\left(k(k\,a-b)\right)x+\left(k^2\,a^2-2k\,a\,b+b^2-1\right)=0$
La droite D_k est tangente à l'ellipse si cette équation a une solution double, c'est-à-dire si son discriminant est égal à zéro.



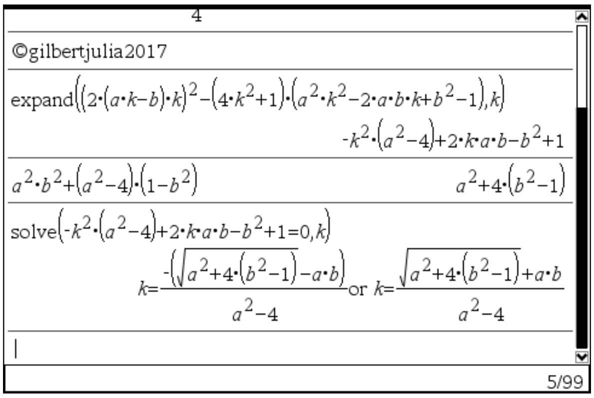
Le discriminant de cette équation au second degré en x est : $\Delta_x \underset{gjulia2017}{=} \left(4-a^2\right)k^2+2k\,a\,b+1-b^2$

Si $a^2=4$, alors $\Delta_x=2k\,a\,b+1-b^2$ et ce discriminant est nul pour une seule valeur de k : $k=\dfrac{b^2-1}{2a\,b}$.

Sauf si I est un des deux sommets de l'ellipse situés sur Ox, on peut mener par I une tangente à l'ellipse non parallèle à Oy (la parallèle à Oy issue de I passe par un de ces deux sommets et constitue une autre tangente passant par I ; dans ce cas, il existe deux tangentes $_{gj}$ distinctes à l'ellipse dont une est parallèle à Oy).

Sinon, Δ_x est une expression au second degré en k de discriminant réduit : $\Delta_k=a^2+4\left(b^2-1\right)=4\left(\dfrac{a^2}{4}+b^2-1\right)$

Si $\Delta_k<0$ (I à l'intérieur de l'ellipse) il n'existe aucune tangente à l'ellipse passant par ce point I.
Si $\Delta_k=0$ (I sur l'ellipse) il existe une seule tangente à l'ellipse passant par ce point I.
Si $\Delta_k>0$ (I à l'extérieur de l'ellipse) il existe deux tangentes distinctes à l'ellipse passant par ce point I.



Leurs coefficients directeurs sont :
$k_1 \underset{gj}{=} \dfrac{a\,b-\sqrt{a^2+4\left(b^2-1\right)}}{a^2-4}$ et $k_2=\dfrac{a\,b+\sqrt{a^2+4\left(b^2-1\right)}}{a^2-4}$

Lorsque $a^2 \neq 4$, les deux tangentes sont non parallèles à *Oy* et perpendiculaires si et seulement si $k_1 k_2 = -1$.

Or $k_1 k_2 \underset{gj}{=} \dfrac{1-b^2}{4-a^2}$ en tant que produit des deux solutions de équation au second degré **(1)**.

Les deux tangentes non parallèles à *Oy* et sont perpendiculaires si et seulement si : $\dfrac{1-b^2}{4-a^2} = -1$ c'est-à-dire si et seulement si : $\begin{cases} a^2 \neq 4 \\ a^2+b^2-5=0 \end{cases}_{gjulia2017}$ ce qui situe *I* sur le cercle de centre *O* et de rayon $\sqrt{5}$ excepté aux points d'intersection de ce cercle avec les droites d'équation $x = \pm 2$. Mais en ces points, on peut mener aussi deux tangentes perpendiculaires, l'une parallèle à *Oy* et l'autre à *Ox*.

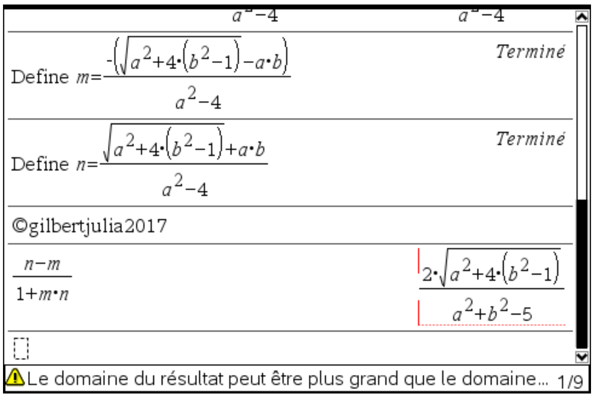
Ce cercle entier est l'ensemble cherché. Il s'appelle le cercle orthoptique de l'ellipse.

Supposons désormais les deux tangentes issues du point *I* non perpendiculaires.
La tangente de l'angle formé par ces deux droites est alors égale à : $\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1 k_2}\right|$.

D'une part $k_2 - k_1 \underset{gj}{=} 2\sqrt{a^2+4\left(b^2-1\right)}$

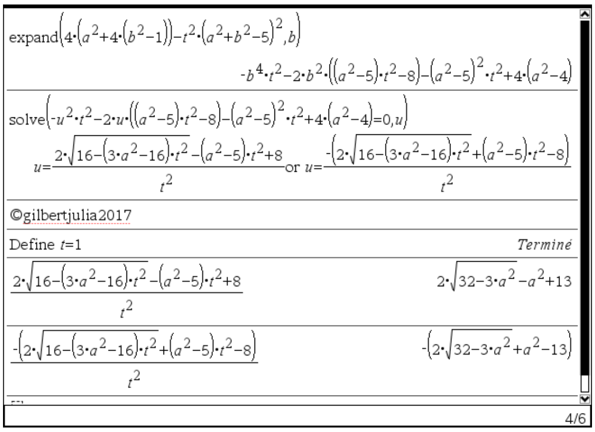
D'autre part $k_1 k_2 = \dfrac{1-b^2}{4-a^2}$.

On obtient ainsi : $\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1 k_2}\right| = \dfrac{2\sqrt{a^2+4\left(b^2-1\right)}}{\left|a^2+b^2-5\right|}$



Si on pose $\tan\theta = t$, lorsque cet angle a pour tangente celle de θ : $\underset{gjulia2017}{}\dfrac{4\left(a^2+4\left(b^2-1\right)\right)}{\left(a^2+b^2-5\right)^2} = t^2$. On obtient ci-contre une relation bicarrée liant *a* et *b*.

En désignant par *u* le carré de *b*, ce carré s'exprime en fonction de *a* et de *t*.



De la sorte, si l'angle des tangentes issues de I est égal à θ, alors I appartient à une courbe Γ du quatrième degré d'équation cartésienne : $\tan^2\theta.\left(x^2+y^2-5\right)^2-4\left(x^2+4\left(y^2-1\right)\right)_{gj}=0$

Cette courbe est réunion de deux courbes d'équations respectives :
$t^2y^2=8+\left(5-x^2\right)t^2+_{gj}2\sqrt{16-\left(3x^2-16\right)t^2}$ et $t^2y^2=8+\left(5-x^2\right)t^2-_{gj}2\sqrt{16-\left(3x^2-16\right)t^2}$

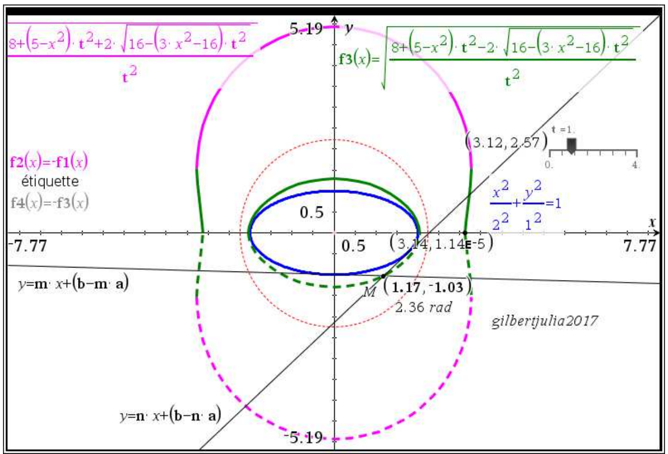
Elle est aussi réunion de quatre courbes représentatives d'une fonction numérique :

$$y=\frac{\sqrt{8+\left(5-x^2\right)t^2+_{gj}2\sqrt{16-\left(3x^2-16\right)t^2}}}{t}\ ;\ y=-\frac{\sqrt{8+\left(5-x^2\right)t^2+2\sqrt{_{gj}16-\left(3x^2-16\right)t^2}}}{t}$$

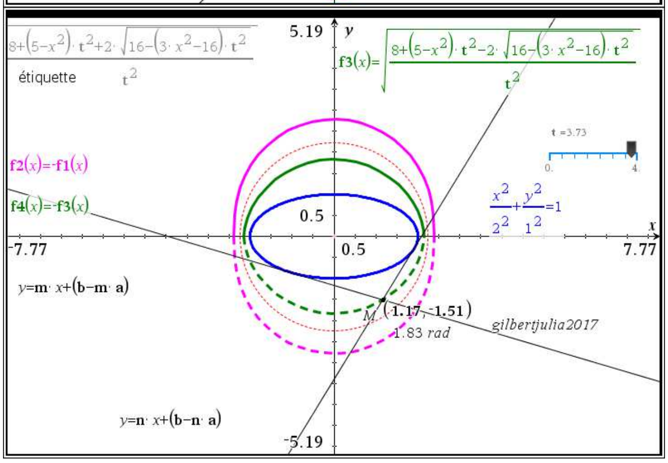
$$y=\frac{\sqrt{8+\left(5-x^2\right)t^2-2\sqrt{16-\left(3x^2-16\right)t^2}}}{t}\ ;\ y=-\frac{\sqrt{8+\left(5-x^2\right)t^2-2\sqrt{16-\left(3x^2-16\right)t^2}}}{t}$$

La conjecture émise au début du sujet est donc fausse. Les isogones de l'ellipse ne sont pas des ellipses.

Lorsque par exemple $\theta=\frac{\pi}{4}$, $\tan\theta=1$, on obtient les quatre courbes d'équations : $y=\sqrt{13-x^2+2\sqrt{32-3x^2}}$; $y=-\sqrt{13-x^2+2\sqrt{32-3x^2}}$; $y=\sqrt{13-x^2-2\sqrt{32-3x^2}}$; $y=-\sqrt{13-x^2-2\sqrt{32-3x^2}}$

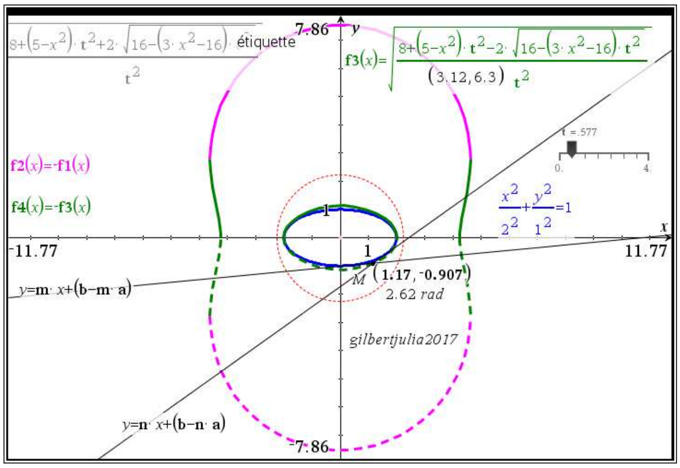


L'écran ci-contre présente l'ellipse (E) en bleu, le cercle orthoptique de l'ellipse en pointillés rouges et la courbe isogone de l'ellipse associée à la valeur $\theta=\frac{\pi}{4}$, réunion de quatre courbes représentatives d'une fonction numérique (magenta pour la représentation graphique de f_1 et vert pour celle de f_3.



Le cas $\theta=\frac{5\pi}{12}$, un peu différent

Le cas $\theta = \dfrac{\pi}{6}$, similaire au cas $\theta = \dfrac{\pi}{4}$



3. En perspective

Il resterait à faire une étude réciproque, par exemple en envisageant une étude des fonctions :

$$x \mapsto f_1(x) = \frac{\sqrt{8+\left(5-x^2\right)t^2 + 2\sqrt{16-\left(3x^2-16\right)t^2}}}{t} \quad \text{et : } x \mapsto f_3(x) = \frac{\sqrt{8+\left(5-x^2\right)t^2 - 2\sqrt{16-\left(3x^2-16\right)t^2}}}{t}$$

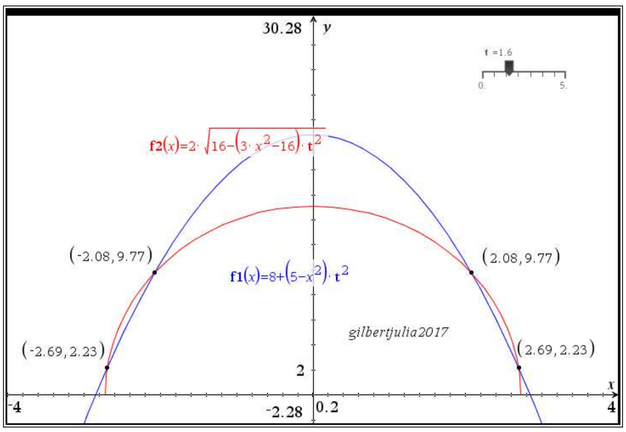
Une condition nécessaire pour que ces deux fonctions, f_1 comme f_3, soient définies est déjà que $16-\left(3x^2-16\right)t^2 \geq 0$, c'est-à-dire que $|x| \leq \dfrac{4\sqrt{3\left(t^2+1\right)}}{3t}$

Pour que f_1 soit définie, il faut de plus que $8+\left(5-x^2\right)t^2 + 2\sqrt{16-\left(3x^2-16\right)t^2} \geq 0$

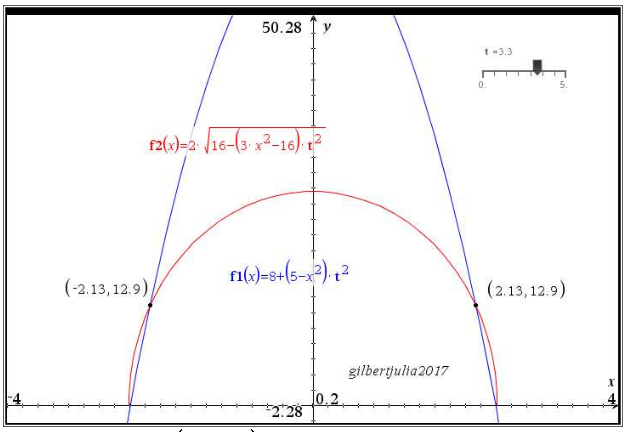
Pour que f_3 soit définie, il faut de plus que $8+\left(5-x^2\right)t^2 - 2\sqrt{16-\left(3x^2-16\right)t^2} \geq 0$

Une étude graphique laisse conjecturer qu'il y a deux cas de figure suivant la valeur de $t = \tan\theta$

Ou bien il existe quatre valeurs de x pour lesquelles $8+\left(5-x^2\right)t^2 = 2\sqrt{16-\left(3x^2-16\right)t^2}$, auquel cas f_3 est définie sur une réunion de trois intervalles



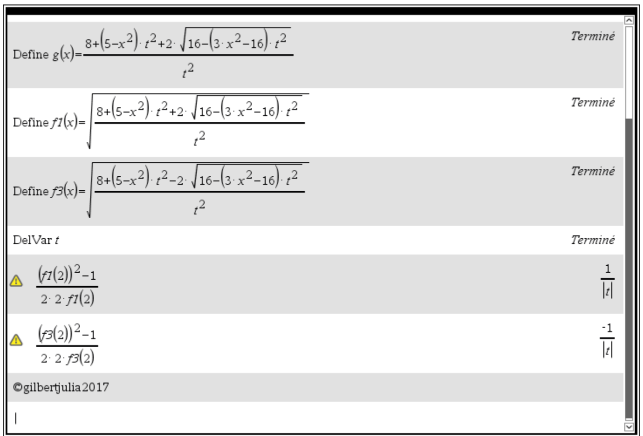
Ou bien il n'en existe que deux, auquel cas f_3 est définie sur un intervalle.



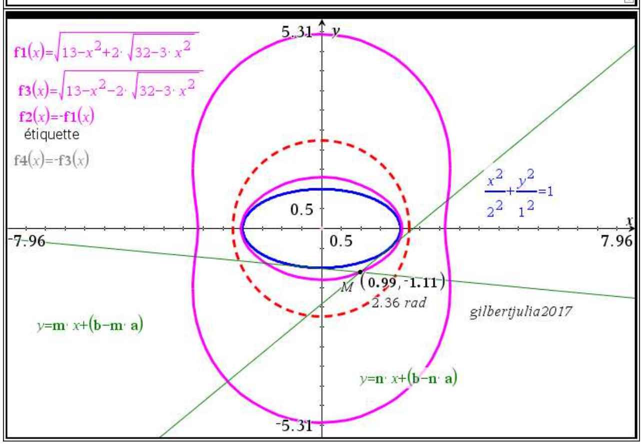
Le changement de cas a lieu lorsque il arrive que simultanément $\begin{cases} 8+(5-x^2)t^2=0 \\ 16-(3x^2-16)t^2=0 \end{cases}$, c'est-à-dire lorsque

$t=2\sqrt{2}$; $x=\sqrt{6}$

On devrait « récupérer » dans cette réciproque les points d'abscisse 2 ou -2, d'où l'on peut mener une tangente à l'ellipse parallèle à *Oy*.



L'écran ci-contre montre en effet qu'on peut mener des points de Γ d'abscisse 2 une deuxième tangente dont l'angle polaire est $\frac{\pi}{2}-\theta$ ou $-\frac{\pi}{2}+\theta$. L'angle géométrique d'une telle tangente avec une parallèle à *Oy* a pour mesure θ.



Soient A_1 et A_2 les points de contact avec l'ellipse des tangentes issues d'un point M de la courbe isogone. Il devrait apparaître que l'angle géométrique $\widehat{A_1 I A_2}$ a pour mesure tantôt θ tantôt $\pi-\theta$.

Dans les deux cas, l'angle géométrique des deux tangentes a pour mesure θ