Isogones d’une ellipse, une généralisation

Après l’étude d’un exemple, voici maintenant une étude « générale » concernant l’ellipse d’équation $\frac{x^2}{u^2}$ *gj* $+y^2=1$ *où u est un nombre réel tel que* $u>1$.

Il s’agit en effet d’une généralisation car toute ellipse d’équation réduite $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *est image d’une ellipse étudiée ici soit par une homothétie soit par la composée d’une homothétie et d’une rotation d’angle droit, transformations qui conservent les angles.*

Ce document ne s’adresse pas aux candidats au CAPES, pour lesquels l’étude des coniques n’est plus un chapitre du programme des lycées.

Il est prudent de se munir d’un logiciel de calcul formel et d’un autre de représentations graphiques. On aura entre autres confiseries l’occasion de déguster des fonctions numériques, aussi bardées de radicaux qu’un touron l’est de pignons, dont l’étude et la représentation graphique pourront sans état d’âme être déléguées à un logiciel.

1. Le sujet.

Le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On désigne par ($E$) l'ellipse d'équation cartésienne $\dfrac{x^2}{u^2} + y^2 = 1$ où u est un réel tel que $u > 1$. Soit I un point du plan, de coordonnées $(a\ ;\ b)$.

Pour tout réel k, on désigne par D_k la droite de coefficient directeur k passant par I.

1. Partie A. Tangentes à l'ellipse issues d'un point du plan. Orthoptique d'une ellipse.

1. Vérifier que l'abscisse d'un point d'intersection de D_k et de (E) est solution de l'équation :

$$\frac{\left(k^2u^2+1\right)}{u^2}x^2 - 2\left(k\left(k\,a-b\right)\right)x + \left(k^2\,a^2 - 2k\,a\,b + b^2 - 1\right) = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

2.1. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que cette équation ait une solution double est que $\left(u^2-a^2\right)k^2 + 2k\,a\,b + 1 - b^2 = 0$

2.2. Que se passe-t-il si $a = \pm u$?

2.3. Montrer que, si I est extérieur à l'ellipse, alors il passe par I deux tangentes à l'ellipse distinctes.

3. Exprimer dans ce cas en fonction de a et de b les coefficients directeurs des deux tangentes à l'ellipse issues de I.

4. Déterminer l'ensemble (C) des points du plan d'où l'on peut mener à l'ellipse deux tangentes perpendiculaires (l'ensemble « orthoptique » de l'ellipse).

2. Partie B

Soit désormais θ un nombre réel tel que $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. On désigne par Γ_θ l'ensemble des points du plan d'où l'on peut mener deux droites tangentes à l'ellipse et dont l'angle géométrique a pour mesure θ.

1.1 Déterminer s'il existe un point d'abscisse u appartenant à Γ_θ.

1.2. Déterminer s'il existe un point d'abscisse $-u$ appartenant à Γ_θ.

2. Soit dans cette question $I\,(a\ ;\, b)$ un point extérieur à l'ellipse, d'abscisse a distincte de u et de $-u$ et non situé sur (C).

2.1. Exprimer en fonction de a et de b la tangente de l'angle géométrique des deux tangentes passant par I.

2.2. On pose : $t = \tan\theta$.

Montrer que l'angle des deux tangentes passant par I a pour mesure θ si et seulement si :

$$t^2 b^4 - 2\left(t^2\left(u^2 - a^2 + 1\right) + 2u^2\right)b^2 + t^2\left(u^2 - a^2 + 1\right)^2 + 4\left(u^2 - a^2\right) \underset{gj}{=} 0 .$$

3. On désigne par F le trinôme défini par :

$$c \underset{gj}{\mapsto} F(c) = t^2 c^2 - 2\left(t^2\left(u^2 - a^2 + 1\right) + 2u^2\right)c + t^2\left(u^2 - a^2 + 1\right)^2 + 4\left(u^2 - a^2\right)$$

3.1. Vérifier que son discriminant réduit est : $\Delta \underset{gj}{=} 4\left(t^2 + 1\right)u^4 - 4t^2\left(u^2 - 1\right)a^2$.

3.2. Etudier, suivant les valeurs de a, le signe de Δ .

4. Soit $I\,(a\ ;\, b)$ un point extérieur à l'ellipse, d'abscisse a distincte de u et de $-u$ et non situé sur (C).

Montrer que :
$$I \in \Gamma_\theta \underset{gjulia}{\Leftrightarrow} \begin{cases} |a| \le \dfrac{u^2\sqrt{t^2+1}}{t\sqrt{u^2-1}} \\ b^2 = \dfrac{t^2\left(u^2 - a^2 + 1\right) + 2u^2 - 2\sqrt{t^2\left(u^4 - a^2u^2 + a^2\right) + u^4}}{t^2} \\ ou\ \ bien \\ b^2 = \dfrac{t^2\left(u^2 - a^2 + 1\right) + 2u^2 + 2\sqrt{t^2\left(u^4 - a^2u^2 + a^2\right) + u^4}}{t^2} \end{cases}$$

(On notera : $h_1 = \dfrac{u^2\sqrt{t^2+1}}{t\sqrt{u^2-1}}$)

Il reste à établir dans quels cas les expressions de b^2 définies ci-dessus aboutissent à un calcul effectif de b en fonction de a et des deux paramètres t et u.

On considère de ce fait les fonctions numériques suivantes dont on se propose de déterminer les domaines de définition :

$$x \mapsto g_1(x) = \frac{\sqrt{2u^2 + t^2\left(u^2 - x^2 + 1\right) - 2\sqrt{t^2\left(u^4 - x^2u^2 - x^2\right) + u^4}}}{t}$$

$$x \mapsto g_2(x) = \frac{\sqrt{2u^2 + t^2\left(u^2 - x^2 + 1\right) + 2\sqrt{t^2\left(u^4 - x^2u^2 - x^2\right) + u^4}}}{t}$$

5. *Etude du signe de* $t^2\left(u^4-x^2+1\right)+2u^2$

5.1. Montrer l'existence d'un réel h_2 strictement positif tel que $|x|\le h_2 \Leftrightarrow t^2\left(u^4-x^2+1\right)+2u^2\ge 0$

(expliciter h_2 en fonction de *t* et de *u*).

5.2. Vérifier que : $h_1{}^2-h_2{}^2=-\dfrac{t^2-u^2\left(u^2-2\right)}{t^2\left(u^2-1\right)}$. En déduire que si $u\le\sqrt{2}$ alors $h_1>h_2$ pour toute valeur de *t* tandis que $u>\sqrt{2}$, le signe de h_1-h_2 dépend du signe de $t-u\sqrt{u^2-2}$

6. *Etude des signes de* $t^2\left(u^2-x^2+1\right)+2u^2\pm 2\sqrt{t^2\left(u^4-x^2u^2+x^2\right)+u^4}$

6.1. Vérifier que :

$$\left(t^2\left(u^2-x^2+1\right)+2u^2\right)^2-\left(2\sqrt{t^2\left(u^4-x^2u^2+x^2\right)+u^4}\right)^2=t^2x^4+2\left(t^2\left(u^2+1\right)+2\right)x^2+t^2\left(u^2+1\right)^2+4u^2$$

6.2. Montrer l'existence de deux réels h_3 et h_4 strictement positifs $\left(h_3<h_4\right)$ tels que :

$\left|t^2\left(u^2-x^2+1\right)+2u^2\right|\le 2\sqrt{t^2\left(u^4-x^2u^2+x^2\right)+u^4}$ lorsque $h_3\le x\le h_4$

6.3. Comparer h_3 et h_4 avec h_2.

7. En déduire qu'en ce qui concerne les domaines de définition de g_1 et de g_2 il y a trois cas de figure (que l'on peut réduire à deux éventuellement) :

- Cas $u\le\sqrt{2}$
- Cas $u>\sqrt{2}$ et $t\ge u\sqrt{u^2-2}$ (semblable au précédent)
- Cas $u>\sqrt{2}$ et $t<u\sqrt{u^2-2}$

8.1. À l'aide d'un logiciel de représentations graphiques, représenter Γ_θ dans les cas suivants :

$u=1{,}3$; $t=\tan\theta=1{,}5$ puis $u=1{,}8$; $t=\tan\theta=3{,}5$ puis $u=3$; $t=\tan\theta=1$

8.2. Etudier à l'aide d'un logiciel de calcul formel le cas $u=\dfrac{5}{3}$; $t=\tan\theta=\dfrac{56}{33}$.

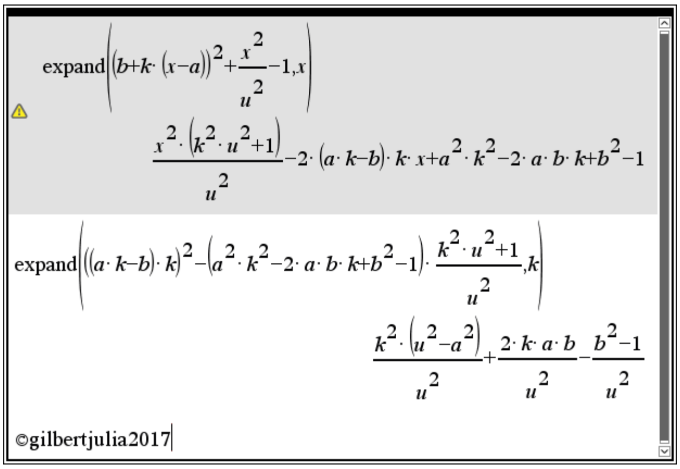
8.3. Etudier à l'aide d'un logiciel de calcul formel le cas $u=\sqrt{17}$; $t=\tan\theta=\dfrac{16}{63}$.

2. Eléments de correction.

Soit $I\ (a;b)$ un point du plan.
La droite D_k passant par I et ayant pour coefficient directeur k a pour équation : $y-b=k(x-a)$.

Les coordonnées d'un éventuel point d'intersection de D_k avec l'ellipse sont solution du système d'équations : $\begin{cases} y-b=k(x-a) \\ \dfrac{x^2}{u^2}+y^2=1 \end{cases}$

1. L'abscisse d'un point d'intersection avec l'ellipse est solution de l'équation : $\dfrac{x^2}{u^2}+\left(k(x-a)+b\right)^2-1=0$ c'est-à-dire de **(1)** : $\dfrac{\left(k^2u^2+1\right)}{u^2}x^2-2\left(k(k\,a-b)\right)x+\left(k^2a^2-2k\,a\,b+b^2-1\right)=0$



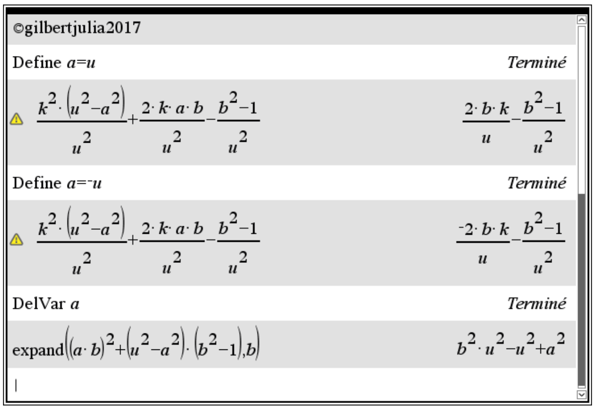
2.1. La droite D_k est tangente à l'ellipse si cette équation a une solution double, c'est-à-dire si son discriminant réduit est égal à zéro.

Le discriminant de cette équation au second degré en x est : $\Delta_x=\dfrac{1}{u^2}\left(\left(u^2-a^2\right)k^2+2k\,a\,b+1-b^2\right)$. Une condition nécessaire et suffisante pour que **(1)** ait une racine double est $u^2\,\Delta_x=\left(u^2-a^2\right)k^2+2k\,a\,b+1-b^2=0$

2.2. Si $a=\pm u$, alors $\Delta_x=\dfrac{\pm 2k\,b}{u}+\dfrac{1-b^2}{u^2}$ et ce discriminant est nul pour une seule valeur de k : $k=\dfrac{\pm b^2-1}{2u\,b}$.

Sauf si I est un des deux sommets de l'ellipse situés sur Ox, on peut mener par I une tangente à l'ellipse non parallèle à Oy (la parallèle à Oy issue de I passe par un de ces deux sommets et constitue une autre tangente passant par I ; dans ce cas, il existe deux tangentes distinctes à l'ellipse dont une est parallèle à Oy).

2.3. Sinon, $\left(u^2-a^2\right)k^2+2k\,a\,b+1-b^2$ est une expression au second degré en k de discriminant réduit :
$\Delta_k=a^2b^2+u^2\left(b^2-1\right)=u^2\left(\dfrac{a^2}{u^2}+b^2-1\right)$

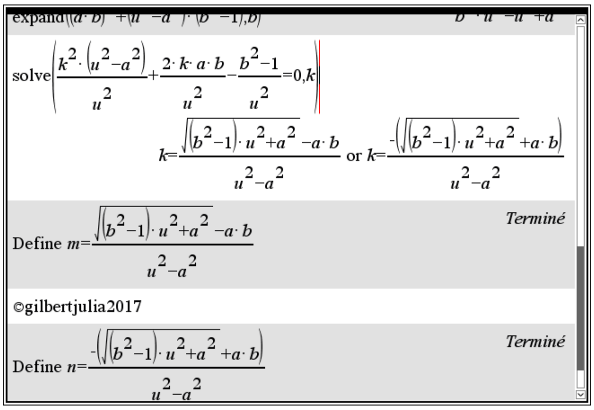


Si $\Delta_k<0$ (I à l'intérieur de l'ellipse) il n'existe aucune tangente à l'ellipse passant par ce point I.

Si $\Delta_k=0$ (I sur l'ellipse) il existe une seule tangente à l'ellipse passant par ce point I.

Si $\Delta_k > 0$ (*I* à l'extérieur de l'ellipse) il existe deux tangentes distinctes à l'ellipse passant par ce point *I*.

Leurs coefficients directeurs sont : $k_1 \underset{gj}{=} \dfrac{a\,b - \sqrt{a^2 + u^2\left(b^2 - 1\right)}}{a^2 - u^2}$ et $k_2 = \dfrac{a\,b + \sqrt{a^2 + u^2\left(b^2 - 1\right)}}{a^2 - u^2}$



3. Lorsque $a^2 \neq u^2$, les deux tangentes sont non parallèles à *Oy* et perpendiculaires si et seulement si $k_1\,k_2 = -1$.

Or $k_1\,k_2 \underset{gj}{=} \dfrac{b^2-1}{a^2-u^2}$ en tant que produit des deux solutions de équation au second degré **(1)**.

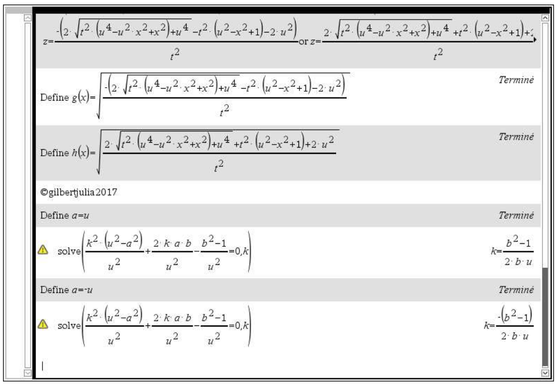
Les deux tangentes non parallèles à *Oy* et sont perpendiculaires si et seulement si : $\dfrac{b^2-1}{a^2-u^2} = -1$ c'est-à-dire si et seulement si : $\begin{cases} a^2 \neq u^2 \\ a^2 + b^2 = 1 + u^2 \end{cases}$ $_{gjulia2017}$ ce qui situe *I* sur le cercle de centre *O* et de rayon $\sqrt{1+u^2}$ excepté aux points d'intersection de ce cercle avec les droites d'équation $x = \pm u$. Ces points sont les points de coordonnées $(\pm u\ ;\ \pm 1)$. Mais en ces points, on peut mener aussi deux tangentes perpendiculaires, l'une parallèle à *Oy* et l'autre à *Ox* (elles passent chacune par un des quatre sommets de l'ellipse).

Ce cercle entier est l'ensemble cherché. Il s'appelle le cercle orthoptique de l'ellipse.

Partie B

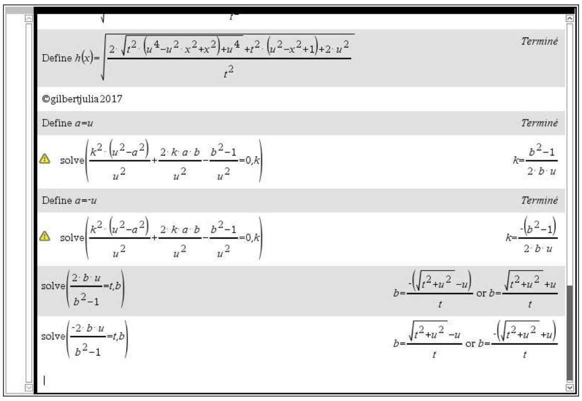
On suppose dans ce qui suit que $I(a\,;\,b)$ est strictement extérieur à l'ellipse. On peut mener deux tangentes distinctes à l'ellipse passant par ce point.

1. Supposons que : $a^2 = u^2$
Si $a = \pm u$, la droite d'équation $x = \pm u$ est tangente à l'ellipse en un sommet.



Puisque I est extérieur à l'ellipse, I est distinct de ce sommet et on peut mener par I une deuxième tangente, de coefficient directeur : $k = \pm \dfrac{b^2-1}{2bu}$.

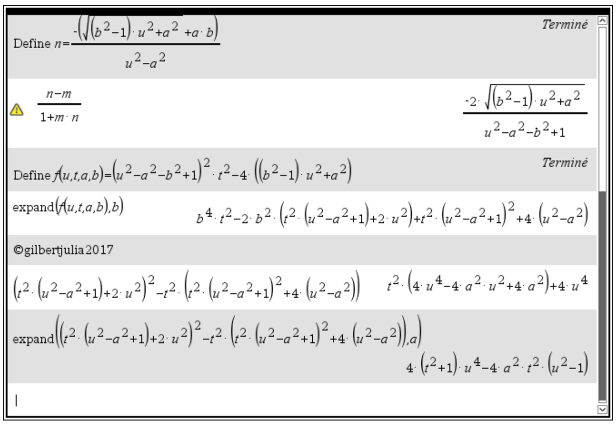
Ce coefficient directeur représente la tangente de l'angle polaire de cette droite.
La tangente de l'angle géométrique que détermine cette droite avec la droite d'équation $x = \pm u$ est ainsi : $\left|\dfrac{1}{k}\right| = \left|\dfrac{2bu}{b^2-1}\right|$.



L'angle géométrique des deux droites est égal à θ si et seulement si : $\left|\dfrac{2bu}{b^2-1}\right| = t$

On obtient dans chaque cas deux points appartenant à Γ_θ d'ordonnées ${}_{gj}\ \dfrac{\pm u \pm \sqrt{t^2+u^2}}{t}$

3. Supposons maintenant que $a^2 \neq u^2$.



La tangente de l'angle φ formé par ces deux droites est alors égale à : $\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$.

$$\tan\varphi = \left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right| =_{gjulia} \frac{2\sqrt{a^2+u^2\left(b^2-1\right)}}{\left|a^2+b^2-1-u^2\right|}.$$

Si on pose $\tan\theta = t$, cet angle a pour tangente celle de θ :

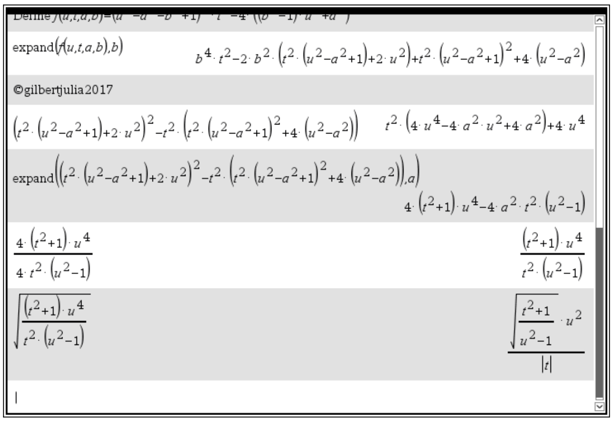
$$_{gjulia2017}\ \tan\varphi = \tan\theta \Leftrightarrow \frac{4\left(a^2+u^2\left(b^2-1\right)\right)}{\left(a^2+b^2-1-u^2\right)^2} = t^2.$$

On obtient une relation bicarrée liant a et b conforme à celle donnée par l'énoncé.

L'expression bicarrée en b obtenue amène à s'intéresser au polynôme $F(c)$ obtenu en posant $c = b^2$:

Son discriminant réduit calculé ci-contre est positif lorsque $|a| \le \dfrac{u^2\sqrt{t^2+1}}{t\sqrt{u^2-1}}$.

Ce polynôme a alors deux racines et il est factorisable.



Lorsque $|a| \le \dfrac{u^2\sqrt{t^2+1}}{t\sqrt{u^2-1}}$,

$$F(c) = t^2\left(c - \frac{t^2\left(u^2-a^2+1\right)+2u^2-2\sqrt{t^2\left(u^4-a^2u^2+a^2\right)+u^4}}{t^2}\right)\left(c - \frac{t^2\left(u^2-a^2+1\right)+2u^2+2\sqrt{t^2\left(u^4-a^2u^2+a^2\right)+u^4}}{t^2}\right)$$

4. Soit $I(a\ ;\ b)$ un point extérieur à l'ellipse, d'abscisse a distincte de u et de $-u$ et non situé sur (C).

Il appartient à Γ_θ si et seulement si $F\left(b^2\right) = 0$

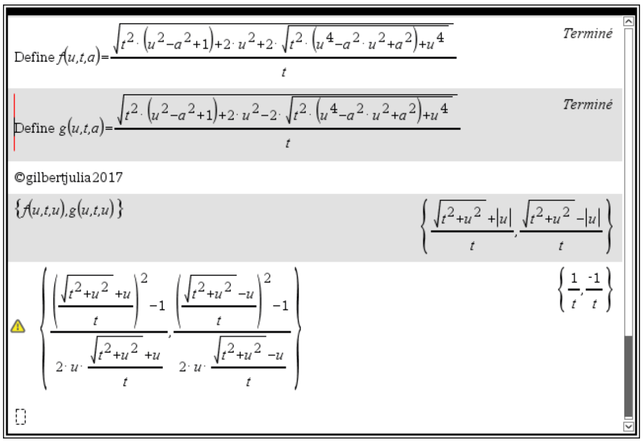
Si $|a| > \dfrac{u^2\sqrt{t^2+1}}{t\sqrt{u^2-1}}$, alors le polynôme F a un discriminant strictement négatif et est strictement positif pour toute valeur réelle. Aucun point de Γ_θ ne peut avoir une telle abscisse.

Si $|a| \le \dfrac{u^2\sqrt{t^2+1}}{t\sqrt{u^2-1}}$, alors F est factorisable.

$$F\left(b^2\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = \dfrac{t^2\left(u^2-a^2+1\right)+2u^2-2\sqrt{t^2\left(u^4-a^2u^2+a^2\right)+u^4}}{t^2} \\ ou\ \ bien \\ b^2 = \dfrac{t^2\left(u^2-a^2+1\right)+2u^2+2\sqrt{t^2\left(u^4-a^2u^2+a^2\right)+u^4}}{t^2} \end{cases}$$

Il reste à voir suivant les valeurs de a dans quels cas les seconds membres sont des nombres positifs. Dans l'affirmative, I appartient Γ_θ si et seulement si : $b = \pm g_1(a)$ ou bien $b = \pm g_2(a)$ où g_1 et g_2 sont définies dans l'énoncé.

On « récupère au passage » les points situés sur les courbes représentatives de g_1 et de g_2 qui ont pour abscisse u ou bien $-u$. Leur ordonnée est $\dfrac{\sqrt{t^2+u^2}\pm u}{t}_{gj}$ et dans ces cas là on peut mener de I une tangente de pente $\dfrac{1}{t}$ ou $-\dfrac{1}{t}$, qui détermine avec une parallèle à Oy un angle géométrique de mesure θ. Il en est de même pour les points d'abscisses $\pm u$ courbes représentatives des fonctions opposées.



Il apparaît que Γ_θ est une quartique d'équation cartésienne :

$$t^2y^4-2\left(t^2\left(u^2-x^2+1\right)+2u^2\right)y^2+t^2\left(u^2-x^2+1\right)^2+4\left(u^2-x^2\right)=_{gj}0$$

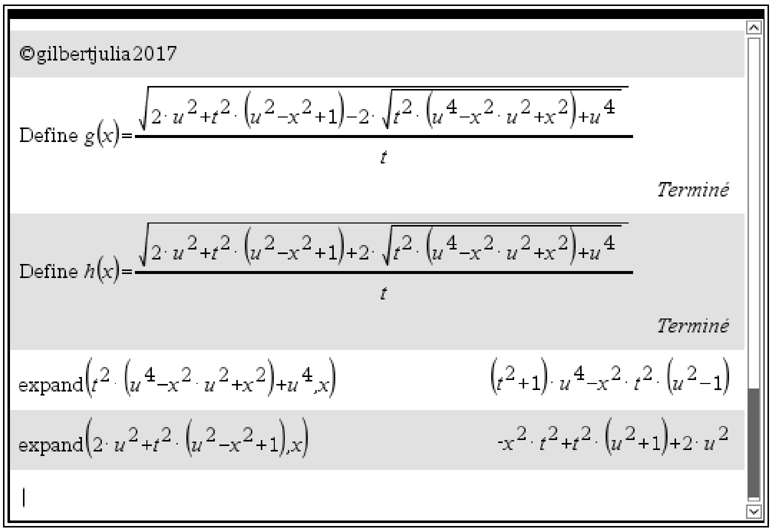
5. Une condition nécessaire (mais non suffisante) pour que les fonctions g_1 et g_2 soient définies est que $t^2\left(u^4-x^2u^2+x^2\right)+u^4\geq 0$ c'est-à-dire que $|x|\leq_{gj}\dfrac{u^2}{\sqrt{u^2-1}}\dfrac{\sqrt{t^2+1}}{t}=h_1$.

Les domaines de définition de g_1 et de g_2 sont de toute façon inclus dans $\left[-h_1\ ;\ h_1\right]$

5. 2.

$$t^2\left(u^4-x^2+1\right)+2u^2\geq 0\Leftrightarrow |x|\leq\frac{\sqrt{t^2\left(u^2+1\right)+2u^2}}{t}$$

Ainsi : $h_2=\dfrac{\sqrt{t^2\left(u^2+1\right)+2u^2}}{t}$



5.3. Les réels h_1 et h_2 sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.

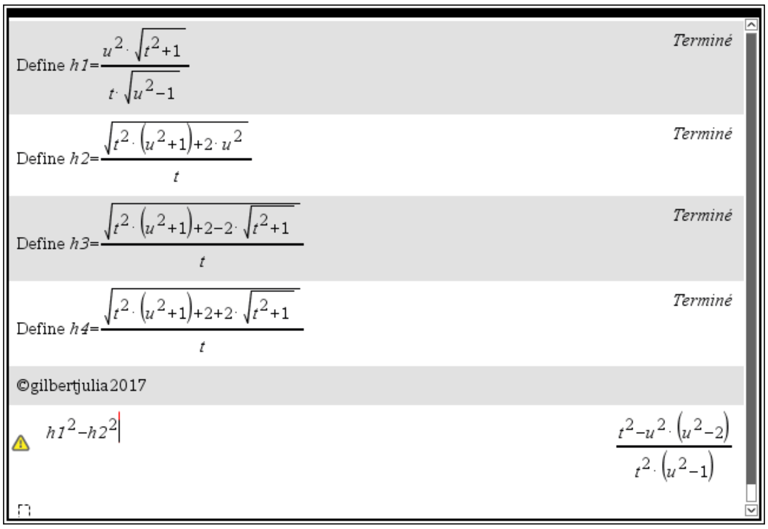
Le calcul de $h_1^2 - h_2^2$ montre que :

$$h_1^2 - h_2^2 \underset{gjulia2017}{=} -\frac{t^2 - u^2(u^2-2)}{t^2(u^2-1)}$$

Trois cas de figure apparaissent :

- Si $u \le \sqrt{2}$, $h_1^2 - h_2^2 > 0$ et donc $h_1 > h_2$ quelle que soit la valeur de t.
- Si $u > \sqrt{2}$ et $t \ge u\sqrt{u^2-2}$, $h_1^2 - h_2^2 \ge 0$ et donc $h_1 \ge h_2$

Si $u > \sqrt{2}$ et $t < u\sqrt{u^2-2}$, $h_1^2 - h_2^2 < 0$ et donc $h_1 < h_2$



6.1. L'étude de la différence des deux carrés montre qu'il s'agit d'une expression bicarrée

$$x^4t^2 - 2x^2\left(t^2(u^2+1)+2\right) + t^2(u^2+1)^2 + 4u^2$$

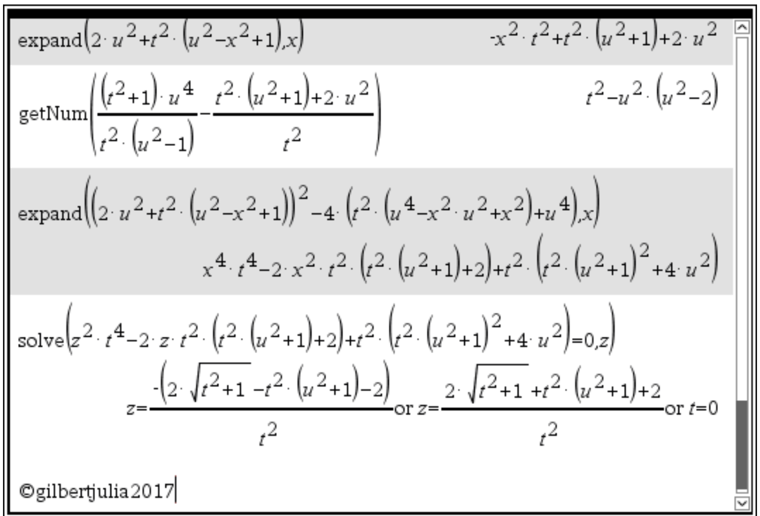
6.2. Le polynôme

$$z \mapsto z^2t^2 - 2z\left(t^2(u^2+1)+2\right) + t^2(u^2+1)^2 + 4u^2$$

ayant un produit et une somme de racines tous deux strictement positifs a deux racines strictement positives $_{gj}$.

Le polynôme

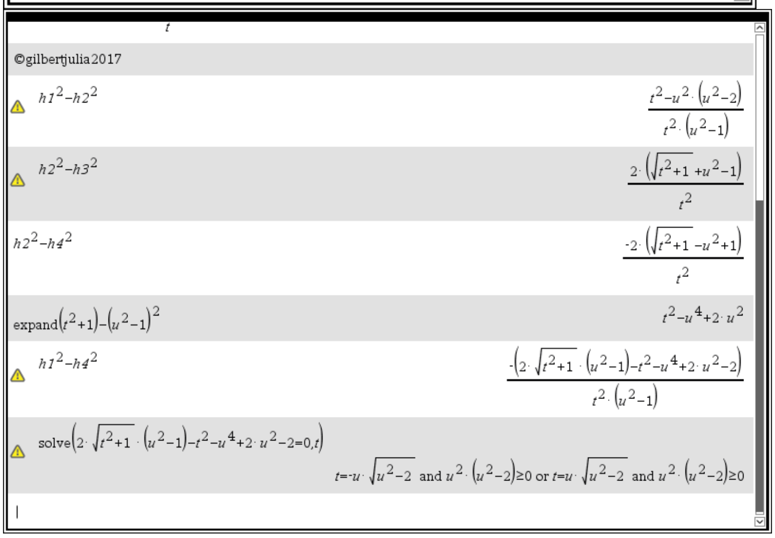
$x \mapsto x^4t^2 - 2x^2\left(t^2(u^2+1)+2\right) + t^2(u^2+1)^2 + 4u^2$ a quatre racines distinctes deux à deux opposées.



Il s'agit de $h_3 \underset{gjulia}{=} \dfrac{\sqrt{t^2(u^2+1)+2-2\sqrt{t^2+1}}}{t}$, de $h_4 = \dfrac{\sqrt{t^2(u^2+1)+2+2\sqrt{t^2+1}}}{t}$ et leurs opposés.

Lorsque $h_3 \le |x| \le h_4$ le polynôme ci-dessus est négatif et en conséquence :

$$\left|t^2(u^2-x^2+1)+2u^2\right| \underset{gj}{\le} 2\sqrt{t^2(u^2-x^2u^2+x^2)+u^4}$$



6.3. On vérifie en outre $_{gjulia2017}$ que $h_2^2 - h_3^2 = h_4^2 - h_2^2 \underset{gj}{=} 2\left(\sqrt{t^2+1}+u^2-1\right)$ est du même signe que $t^2 - u^2(u^2-2)$

7. Les trois cas de figure (on peut réduire à deux).

Cas $u \le \sqrt{2}$

Alors : $0 < h_3 < h_4 < h_2 < h_1$

- Si $x \le h_3$, $\left|t^2\left(u^2 - x^2 + 1\right) + 2u^2\right| \ge 2\sqrt{t^2\left(u^2 - x^2 u^2 + x^2\right) + u^4}$ et $t^2\left(u^4 - x^2 + 1\right) + 2u^2 \ge 0$
- Si $h_3 < x \le h_4$, $\left|t^2\left(u^2 - x^2 + 1\right) + 2u^2\right| \le 2\sqrt{t^2\left(u^2 - x^2 u^2 + x^2\right) + u^4}$ et $t^2\left(u^4 - x^2 + 1\right) + 2u^2 \ge 0$
- Si $h_4 < x \le h_2$, $\left|t^2\left(u^2 - x^2 + 1\right) + 2u^2\right| \le 2\sqrt{t^2\left(u^2 - x^2 u^2 + x^2\right) + u^4}$ et $t^2\left(u^4 - x^2 + 1\right) + 2u^2 \le 0$
- Si $h_2 < x \le h_1$, $\left|t^2\left(u^2 - x^2 + 1\right) + 2u^2\right| \ge 2\sqrt{t^2\left(u^2 - x^2 u^2 + x^2\right) + u^4}$ et $t^2\left(u^4 - x^2 + 1\right) + 2u^2 \le 0$

La fonction g_1 est définie sur l'intervalle $[-h_3\ ;\ h_3]$.
La fonction g_2 est définie sur l'intervalle $[-h_4\ ;\ h_4]$.

Cas $u > \sqrt{2}$ **et** $t > u\sqrt{u^2 - 2}$

Alors $0 < h_3 < h_2 < h_4 < h_1$ comme dans le cas précédent.
La fonction g_1 est définie sur l'intervalle $[-h_3\ ;\ h_3]$.
La fonction g_2 est définie sur l'intervalle $[-h_4\ ;\ h_4]$.

Cas $u > \sqrt{2}$ **et** $t \le u\sqrt{u^2 - 2}$

Alors : $0 < h_3 < h_4 < h_1 < h_2$.

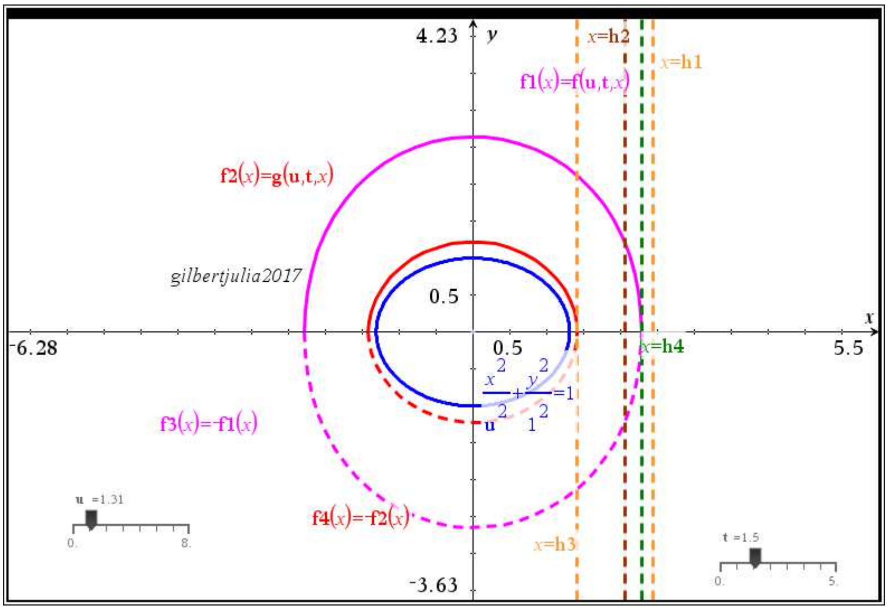
La fonction g_1 est définie sur une réunion d'intervalles : $[-h_1\ ;\ -h_4] \cup [-h_3\ ;\ h_3] \cup [h_4\ ;\ h_1]$.
La fonction g_2 est définie sur l'intervalle $[-h_1\ ;\ h_1]$.

En bleu, l'ellipse.

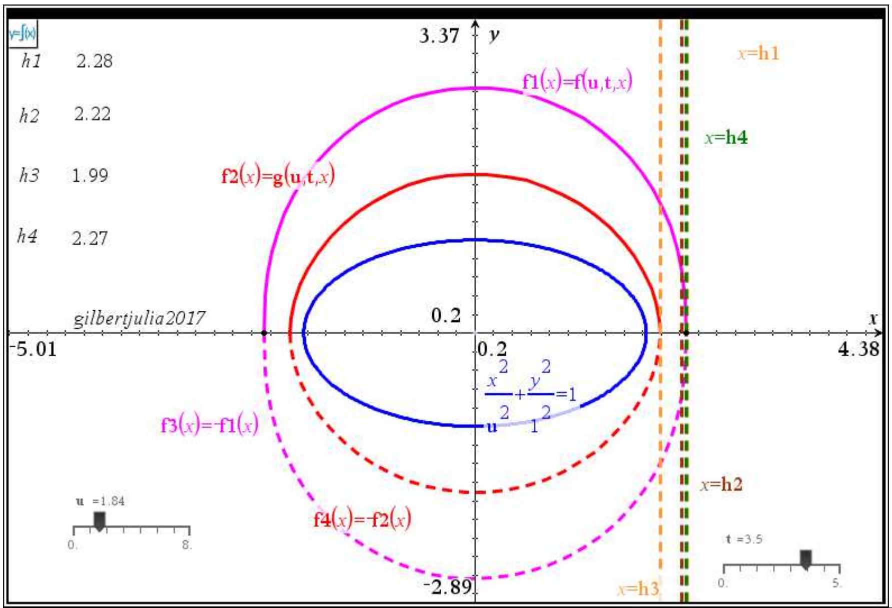
En rouge, les représentations graphiques de g_1 (trait plein) et de son opposée (pointillés)

En magenta, les représentations graphiques de g_2 (trait plein) et de son opposée (pointillés)

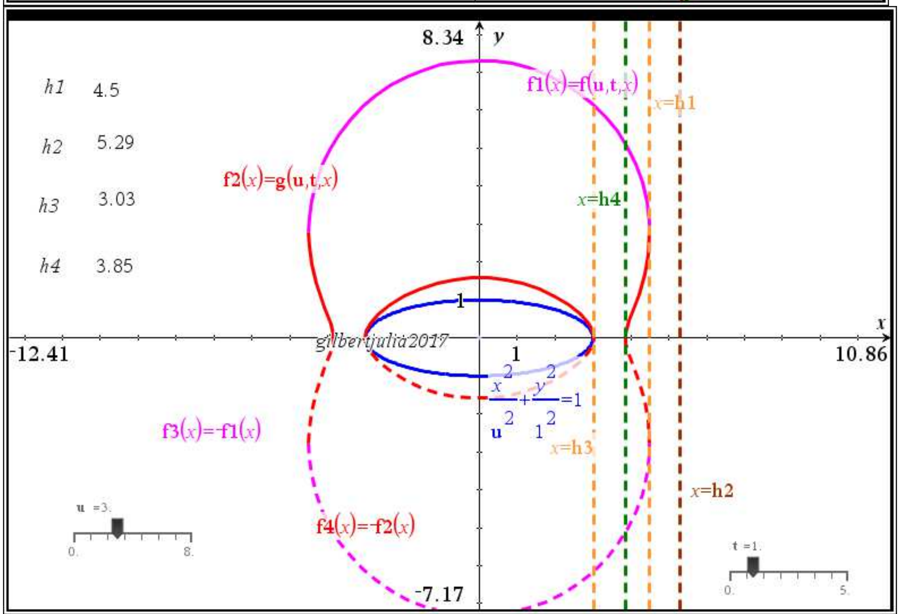
Cas $u \le \sqrt{2}$



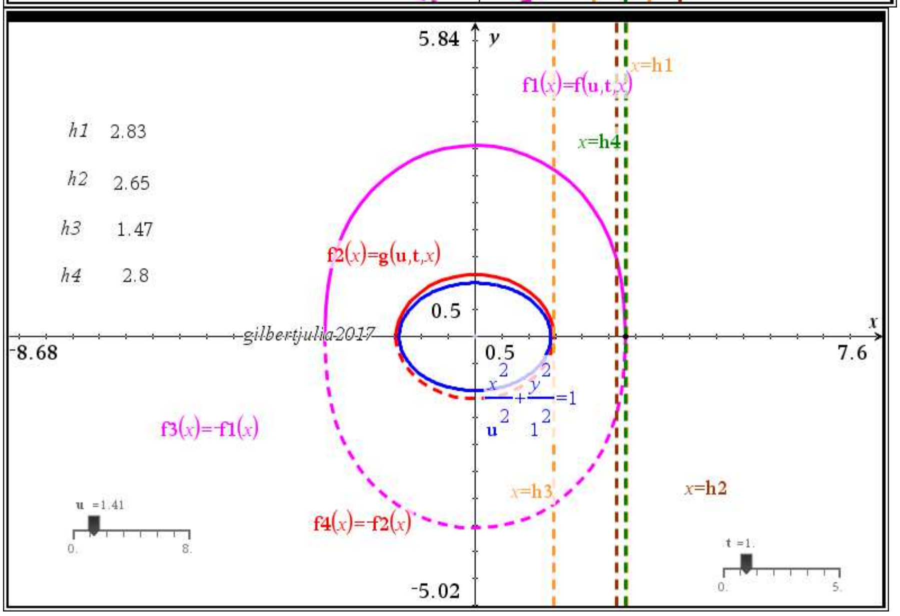
Cas $u > \sqrt{2}$ **et** $t \geq u\sqrt{u^2 - 2}$



Cas $u > \sqrt{2}$ **et** $t < u\sqrt{u^2 - 2}$



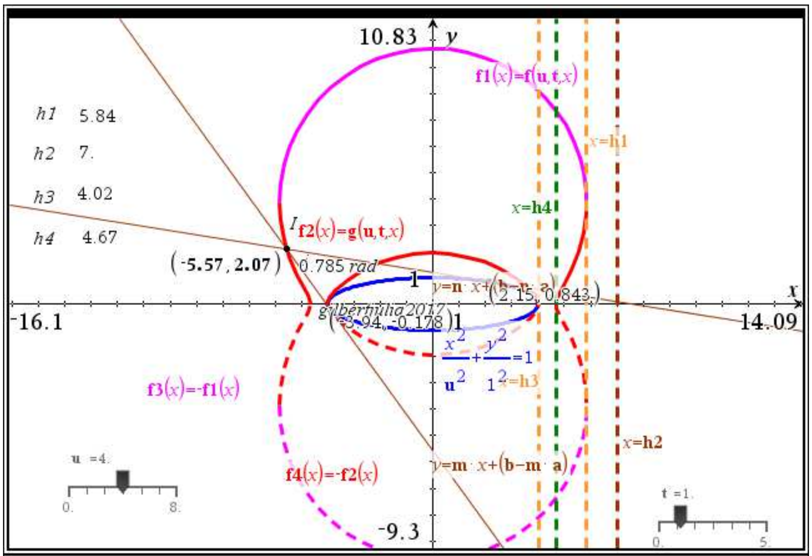
Cas $u = \sqrt{2}$



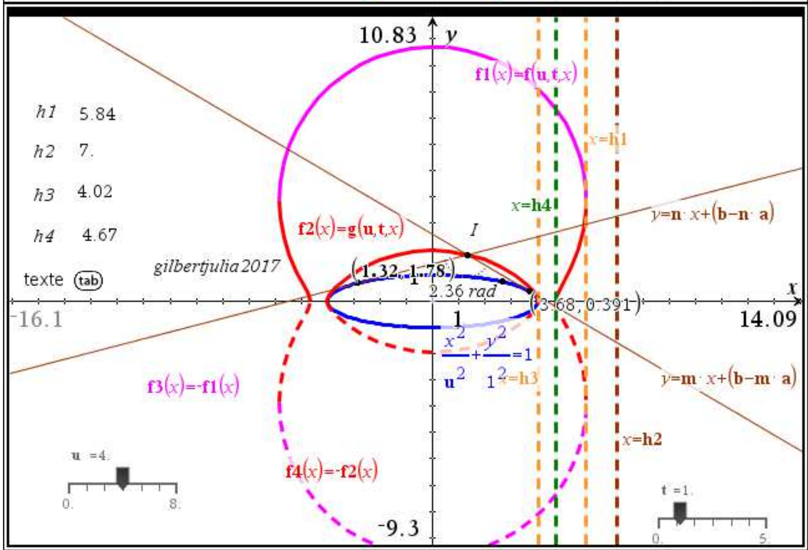
Soient M et N les points de contact avec l'ellipse des tangentes issues d'un point I de Γ_θ .

De façon générale, l'ensemble Γ_θ est réunion de deux branches.

Sur l'une, l'angle de sommet I du triangle IMN a pour mesure θ



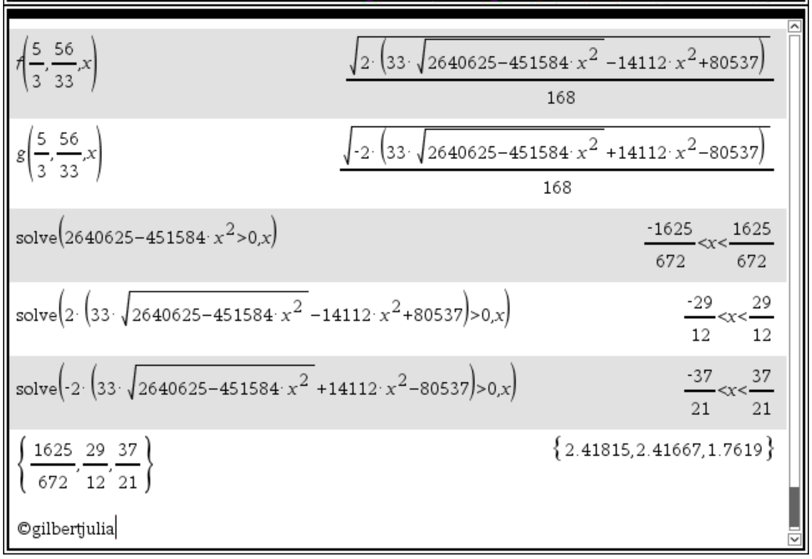
Sur l'autre, l'angle de sommet I du triangle IMN a pour mesure $\pi-\theta$



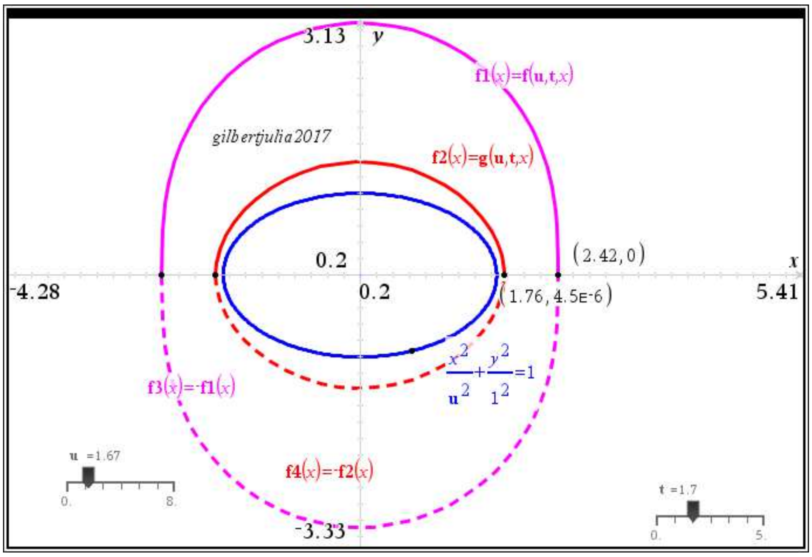
$u=\dfrac{5}{3}$; $t=\tan\theta=\dfrac{56}{33}$ entre dans le « deuxième cas » $u>\sqrt{2}$ et $t\geq u\sqrt{u^2-2}$.

Il a la particularité que les bornes h_1, h_4, h_3 ont des valeurs rationnelles.

La fonction g_1 est définie sur $\left[-\dfrac{37}{21}\,;\,\dfrac{37}{21}\right]$ tandis que la fonction g_2 est définie sur $\left[-\dfrac{29}{12}\,;\,\dfrac{29}{12}\right]$

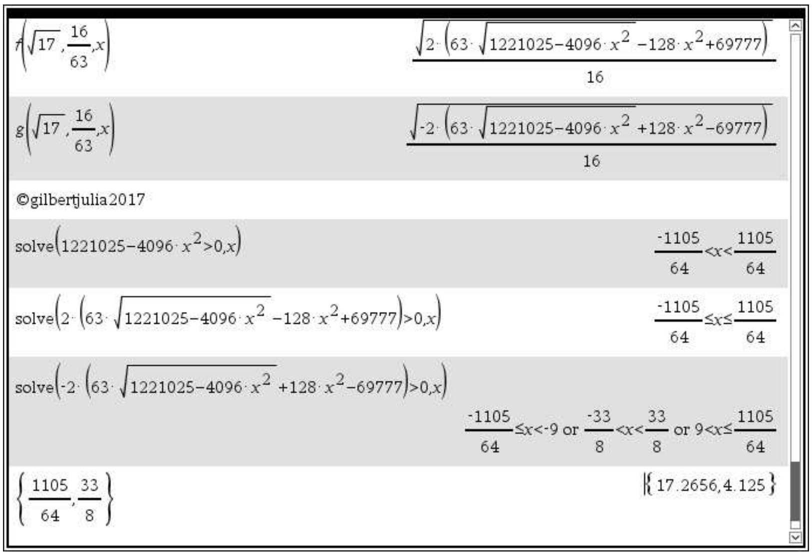


On obtient la représentation graphique ci-contre



$u=\sqrt{17}$; $t=\tan\theta=\dfrac{16}{63}$ entre dans le « troisième cas » $u>\sqrt{2}$ et $t<u\sqrt{u^2-2}$.

Il a la particularité que les bornes h_1, h_3, h_4 ont des valeurs rationnelles.



La fonction g_1 est définie sur $\left[-\dfrac{1105}{64}\,;\,\dfrac{1105}{64}\right]$ tandis que la fonction g_2 est définie sur $\left[-\dfrac{1105}{64}\,;-9\right]\cup\left[-\dfrac{33}{8};\dfrac{33}{8}\right]$ $\cup\left[9\,;\dfrac{1105}{64}\right]$.

On obtient la représentation graphique ci-dessous :