Autour des olympiades internationales 2021

1. Le sujet

Il s'inspire d'un exercice des Olympiades internationales donné le lundi 19 juillet 2021 :

« *Soit n un entier supérieur ou égal à 100. Clara écrit les nombres* $n, n+1, \ldots, 2n$ *sur des cartes distinctes. Elle mélange ensuite les* $(n+1)$ *cartes, puis les sépare en deux piles. Montrer qu'au moins l'une des piles contient deux cartes pour lesquelles la somme des nombres est un carré parfait.* »

Cet énoncé amène à une résolution de cet exercice.

0. Question préliminaire.

On se donne trois entiers relatifs u, v et w tels que $u < v < w$ et on considère le système d'équations linéaires, d'inconnues x, y et z : $\begin{cases} x+y=u \\ y+z=v \\ z+x=w \end{cases}$

0.1. Résoudre ce système.

0.2. Ordonner les trois nombres x, y et z.

0.3. Montrer que les nombres x, y et z sont des entiers lorsque ou bien u, v et w sont trois nombres pairs ou bien un et un seul de ces trois nombres est un nombre pair.

1. Soit n un entier strictement positif. On suppose qu'il existe trois entiers distincts x, y et z tous compris entre n et $2n$, tels que les trois sommes $x+y$, $y+z$, $z+x$ soient toutes des carrés parfaits. Montrer qu'alors, dans l'expérience de Clara, au moins l'une des piles contient deux cartes pour lesquelles la somme des nombres est un carré parfait.

2. Le cas de 100

On se propose de démontrer qu'il est possible de trouver trois entiers distincts *x, y* et *z* tous compris entre 100 et 200, tels que les trois sommes $x+y,\ y+z,\ z+x$ soient toutes des carrés parfaits.

2.1. Justifier que ces carrés parfaits, notés *u, v, w* et tels que $u<v<w$ ne peuvent être que les carrés de 15, 16, 17, 18 ou 19.

2.2. Justifier que nécessairement, un, et un seulement, des nombres *u, v, w* est pair.

2.3. Montrer que, si *w* est le carré de 19, *u* ne peut être ni le carré de 15 ni le carré de 16.

2.4. Résoudre chacun des systèmes $\begin{cases} x+y=u \\ y+z=v \\ z+x=w \end{cases}$ qui sont susceptibles de donner une solution. En déduire qu'il existe effectivement une solution conforme à l'expérience de Clara lorsque $n=100$.

Pour quelles autres valeurs de *n* (autres que 100) peut-on proposer, au même prix, la même solution au problème de Clara ?

3. Le cas général

On se propose de montrer que, pour $n \geq 100$, on peut toujours trouver trois entiers *x, y* et *z* compris entre *n* et 2*n* dont les sommes deux à deux sont des carrés parfaits consécutifs.

3.1. Soit *a* un nombre entier positif. Résoudre le système : $\begin{cases} x+y=(2a-1)^2 \\ y+z=4a^2 \\ z+x=(2a+1)^2 \end{cases}$ et justifier que, pour $a \geq 9$, les solutions sont des entiers supérieurs à 100.

3.2. L'entier *n* étant supérieur ou égal à 100, on se propose d'étudier dans quel cas il est toujours possible de trouver un entier *a* tel que : $2n \geq 2a^2+4a > 2a^2+1 > 2a^2-4a \geq n$

Montrer que, pour que $2n \geq 2a^2+4a > 2a^2+1 > 2a^2-4a \geq n$, il faut que *a* appartienne à l'intervalle $\left[\dfrac{\sqrt{2(n+2)}+2}{2}\ ;\ \sqrt{n+1}-1\right]$

3.3. Soit f la fonction définie sur $[100\ ;+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x+1}-\dfrac{\sqrt{2(x+2)}}{2}-2$.

Montrer que cette fonction est croissante sur $[100\ ;+\infty[$.

Calculer $f(100)$ et $f(126)$.

Montrer que, pour $n \geq 126$, il y a certainement un entier a dans l'intervalle $\left[\dfrac{\sqrt{2(n+2)}+2}{2}\ ;\sqrt{n+1}-1\right]$.

3.4. Conclure.

2. Eléments de correction

0.1. Il apparaît que le système $\begin{cases} x+y=u \\ y+z=v \\ z+x=w \end{cases}$ admet pour solution le triplet : $\begin{cases} x=\dfrac{u-v+w}{2} \\ y=\dfrac{v-w+u}{2} \\ z=\dfrac{w+u-v}{2} \end{cases}$

Ainsi : $x-y=w-v$ et $z-x=v-u$

Si on suppose que $u<v<w$, alors : $x-y>0$ et $z-x>0$, ce qui donne le classement : $z>x>y$.

0.2. Pour que le triplet solution soit un triplet d'entiers, il faut que les trois nombres $u-v+w,\ v-w+u,\ w+u-v$ soient tous des nombres pairs. Voyons quand c'est le cas.

- Si *u, v, w* sont trois nombres pairs, c'est le cas.
- Si deux de ces nombres sont pairs et un est impair, la somme des deux pairs est paire, et la différence avec le troisième est impaire : au moins un des trois nombres $u-v+w,\ v-w+u,\ w+u-v$ est impair, ce n'est pas le cas.
- Si un est pair et les deux autres impairs : la somme ou la différence des deux impairs est paire, et la somme ou la différence avec le troisième, qui est pair, est paire : c'est le cas.
- Si les trois sont impairs : la somme de deux impairs est paire, et la différence avec le troisième est impaire : les trois nombres $u-v+w,\ v-w+u,\ w+u-v$ sont impairs, ce n'est le cas.

Donc, le système a des solutions entières lorsque parmi les nombres *u, v, w*, ou bien tous sont pairs ou bien un seul exactement est pair.

1. Soit n un entier strictement positif. On suppose qu'il existe trois entiers distincts *x, y* et *z* tous compris entre n et $2n$, tels que les trois sommes $x+y,\ y+z,\ z+x$ soient toutes des carrés parfaits. Si on partage l'ensemble des cartes en deux piles, une des piles contient au moins deux des trois nombres *x, y* ou *z*. La somme de ces deux nombres est un carré parfait.

2. Le cas de 100

2.1. La somme de deux nombres distincts compris entre 100 et 200 est au moins égale à $100+101=201$, nombre qui est strictement supérieur au carré de 14 (égal à 196) et est au plus égale à $199+200=399$, nombre qui est strictement inférieur au carré de 20 (égal à 400). Les carrés parfaits situés entre 201 et 399 sont donc ceux de 15, 16, 17, 18 et 19, c'est-à-dire 225, 256, 289, 324 et 361.

2.2. Soient *u, v* et *w* les trois carrés parfaits visés, classés par ordre croissant. Trouver trois nombres compris entre 100 et 200 dont les sommes deux à deux sont égales à ces carrés revient à résoudre un système conforme à la question préliminaire, et dont les solutions sont des entiers compris entre 100 et 200. Comme parmi les cinq carrés possibles, il n'y a que deux carrés pairs, pour que les solutions soient entières, il faut qu'un et un seul des carrés de 16 ou de 18 soit concerné.

2.3. D'autre part, on note que, dans la question préliminaire, on peut écrire : $z-y=w-u$. Si $w=19^2=361$, alors u ne peut être égal ni à $15^2=225$ ni à $16^2=256$, car la différence $z-y=w-u$ serait plus grande que 100.

2.4. Il nous reste comme systèmes susceptibles de fournir une solution les systèmes :

$$\begin{cases} x+y=15^2=225 \\ y+z=16^2=256 \\ z+x=17^2=289 \end{cases} \text{ qui a pour solutions : } x=129\ ;\ y=96\ ;\ z=160$$

Cette solution ne convient pas pour le cas de 100, mais elle conviendrait pour les valeurs de n telles que : $80\le n\le 96$

$$\begin{cases} x+y=15^2=225 \\ y+z=16^2=289 \\ z+x=17^2=324 \end{cases} \text{ qui a pour solutions : } x=130\ ;\ y=95\ ;\ z=194$$

Cette solution ne convient pas, ni pour 100 ni pour aucune autre valeur de n, car z est plus grand que le double de y.

$$\begin{cases} x+y=15^2=289 \\ y+z=16^2=324 \\ z+x=17^2=361 \end{cases} \text{ qui a pour solutions : } x=163\ ;\ y=126\ ;\ z=198 \text{ et cette solution convient pour } n=100.$$

Elle convient aussi pour les valeurs de n telles que $99\le n\le 126$.

Dès lors que l'on a trouvé trois nombres « convenables », c'est-à-dire dont les sommes deux à deux sont des carrés parfaits, en vertu de la question **1**, si on partage l'ensemble des cartes en deux parties, une partie contiendra au moins deux des trois nombres, dont la somme sera un carré parfait.

3. Le cas général

3.1. Il apparaît que le système $\begin{cases} x+y=(2a-1)^2 \\ y+z=4a^2 \\ z+x=(2a+1)^2 \end{cases}$ admet pour solution le triplet : $\begin{cases} x=2a^2+1 \\ y=2a^2-4a \\ z=2a^2+4a \end{cases}$

Il s'agit de trois entiers relatifs et, d'après les résultats de la question préliminaire, lorsque $a \geq 9$:

$2a^2+4a > 2a^2+1 > 2a^2-4a \geq 126 > 100$.

3.2. Essayons de montrer que pour $n \geq 100$, il est toujours possible de trouver un entier a tel que :

$2n \geq 2a^2+4a > 2a^2+1 > 2a^2-4a \geq n$.

3.3. Soit *f* la fonction définie sur $[100\,;+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x+1}-\dfrac{\sqrt{2(x+2)}}{2}-2$

La dérivée de cette fonction est la fonction : $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}-\dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{x+2}}$.

La différence des carrés de $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ et de $\dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{x+2}}$ est : $\dfrac{1}{4(x+1)}-\dfrac{1}{8(x+2)}=\dfrac{x+3}{8(x+1)(x+2)}$. Elle est strictement positive sur $[100\,;+\infty[$ ce qui indique que $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ y est plus grand que $\dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{x+2}}$: la dérivée de *f* est strictement positive, *f* est strictement croissante sur $[100\,;+\infty[$.

On note que : $f(100)=\sqrt{101}-\sqrt{51}-2=0{,}91$ à 10^{-2} près.

Il n'est donc « pas certain » qu'il existe un entier a entre le nombre $\dfrac{\sqrt{2(n+2)}+2}{2}$ et le nombre $\sqrt{n+1}-1$ lorsque $n=100$

Cependant : $f(126)=\sqrt{127}-10=1{,}27$ à 10^{-2} près.

On peut affirmer, en raison de la croissance de *f*, que pour tout entier *n* au moins égal à 126 : $f(n)>1$ et que donc il existe un entier *a* entre le nombre $\dfrac{\sqrt{2(n+2)}+2}{2}$ et le nombre $\sqrt{n+1}-1$.

Ce nombre est plus grand que 126 car : $\dfrac{\sqrt{2(n+2)}+2}{2}\geq 126$

L'expression $2a^2-4a-n$ se factorise en : $2a^2-4a-n=2\times\left(a-\dfrac{\sqrt{2(n+2)}+2}{2}\right)\times\left(a+\dfrac{\sqrt{2(n+2)}-2}{2}\right)$.

Cette expression est positive lorsque *a* est en dehors de l'intervalle $\left]-\dfrac{\sqrt{2(n+2)}-2}{2}\,;\,\dfrac{\sqrt{2(n+2)}+2}{2}\right[$

De même, l'expression $2a^2+4a-2n$ se factorise en :
$2a^2+4a-2n=2\times\left(a-\left(-1+\sqrt{n+1}\right)\right)\times\left(a+\left(1+\sqrt{n+1}\right)\right)$.
Cette expression est négative lorsque *a* est dans l'intervalle $\left[-1-\sqrt{n+1}\,;\,-1+\sqrt{n+1}\right]$

Nous sommes amenés à chercher s'il existe un entier strictement positif *a* qui vérifie à la fois : $a\leq\sqrt{n+1}-1$ et $a\geq\dfrac{\sqrt{2(n+2)}+2}{2}$, autrement dit qui appartient à l'intervalle : $\left[\dfrac{\sqrt{2(n+2)}+2}{2}\,;\,\sqrt{n+1}-1\right]$

Il est certain que cela sera le cas si l'écart entre le nombre $\dfrac{\sqrt{2(n+2)}+2}{2}$ et le nombre $\sqrt{n+1}-1$ est au moins égal à 1.

Ce qui nous amène à considérer la fonction : $n\mapsto\left(\sqrt{n+1}-1\right)-\dfrac{\sqrt{2(n+2)}+2}{2}=\sqrt{n+1}-\dfrac{\sqrt{2(n+2)}}{2}-2$ et à voir dans quelle circonstances cette fonction prend des valeurs plus grandes que 1.

Soit *f* la fonction définie sur $[100\,;+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x+1}-\dfrac{\sqrt{2(x+2)}}{2}-2$

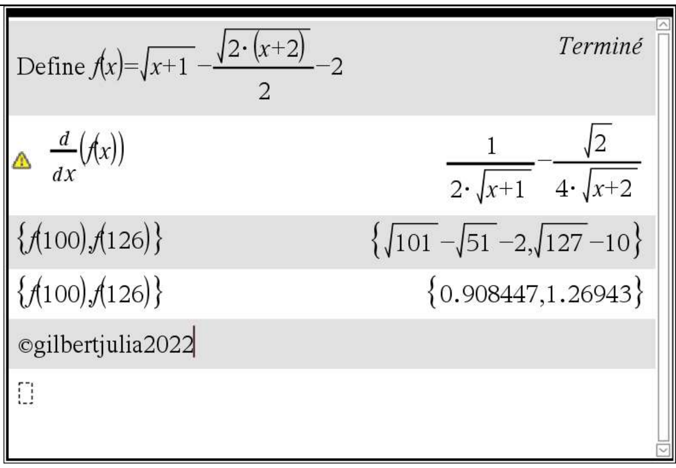
La dérivée de cette fonction est la fonction : $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}-\dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{x+2}}$.

La différence des carrés de $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ et de $\dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{x+2}}$ est : $\dfrac{1}{4(x+1)}-\dfrac{1}{8(x+2)}=\dfrac{x+3}{8(x+1)(x+2)}$. Elle est strictement positive sur $[100\,;+\infty[$ ce qui indique que $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ y est plus grand que $\dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{x+2}}$: la dérivée de f est strictement positive, f est strictement croissante sur $[100\,;+\infty[$.

On note que : $f(100)=\sqrt{101}-\sqrt{51}-2=0{,}91$ à 10^{-2} près.

Il n'est donc « pas certain » qu'il existe un entier a entre le nombre $\dfrac{\sqrt{2(n+2)}+2}{2}$ et le nombre $\sqrt{n+1}-1$ lorsque $n=100$. Mais nous avons vérifié qu'il en existait bien un.

Cependant : $f(126)=\sqrt{127}-10=1{,}27$ à 10^{-2} près.



On peut affirmer, en raison de la croissance de f, que pour tout entier n au moins égal à 126 : $f(n)>1$ et que donc il existe un entier a entre le nombre $\dfrac{\sqrt{2(n+2)}+2}{2}$ et le nombre $\sqrt{n+1}-1$.

3.4. Ainsi, on a d'une part exhibé une solution pour toutes les valeurs de n situées entre 99 et 126, et d'autre part on est certain qu'il y en aura une pour toutes les valeurs au-delà. La question **1** nous garantit que le problème de Clara est résolu.

Le programme **clara** permet de déterminer des solutions pour une valeur de n donnée.

On peut trouver plusieurs solutions.

Rien ne nous dit qu'il n'y a pas d'autres solutions.