Nancy-Metz 1982 : approximation d'une fonction par un polynôme du troisième degré bi-osculateur

Ce problème de baccalauréat 1982 série C de l'académie de Nancy-Metz, porte sur une méthode d'interpolation dite « interpolation de Hermite ».

La partie A étudie un exemple, la partie B est consacrée à l'étude de la structure algébrique de l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, et à la partie C à la construction du polynôme bi-osculateur d'une fonction f donnée sur un intervalle donné puis à quelques majorations dans le cas où f est de classe C^4.

On conviendra que ce problème pourrait être posé très honorablement à une session du CAPES actuel, sans en changer le moindre iota.

Ne pas oublier que, à l'époque, le problème de baccalauréat série C était accompagné de deux exercices, certes plus courts, et que la durée de l'épreuve était de 4 heures.

En résumé, un excellent problème d'entraînement adapté au CAPES.

1. Le sujet

Partie A. Un exemple

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $\left]-1,\ +\infty\right[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f.

2. Déterminer une fonction polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 qui a même valeur et même nombre dérivé que f en 0 et en 1.

3. Soit k la fonction définie sur l'intervalle $\left]-1,\ +\infty\right[$ par $k(x)=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{4}x^3-\dfrac{3}{4}x^2+x-1$. Factoriser k et en déduire la position relative de C_f et C_P, courbes représentatives respectives des fonctions f et P dans un même repère orthonormé du plan. Tracer C_f et C_P, faire figurer les tangentes en leurs points communs.

4. À l'aide d'un encadrement de $1+x$ pour $x\in[0,\ 1]$, montrer que $\dfrac{1}{240}\le\int_0^1 k(x)dx\le\dfrac{1}{120}$

5. Calculer $\int_0^1 f(x)dx$ et $\int_0^1 P(x)dx$

6. Déduire des résultats précédents la valeur de l'entier n tel que : $\dfrac{n}{240}\le\ln 2\le\dfrac{n}{120}$

Partie B : un espace vectoriel de polynômes

On désigne par E l'espace vectoriel sur **R** constitué par la fonction nulle et les fonctions polynômes, à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3.
Soit h un réel strictement positif et φ l'application de E vers $\mathbf{R}^4$ telle que : $\varphi(P) = (P(0),\ P'(0),\ P(h),\ P'(h))$

1. Quelle est la dimension de E ? Montrer que φ est une application linéaire bijective de E sur $\mathbf{R}^4$.

2.1. Soit φ^{-1} la bijection réciproque de φ. Déterminer $P_3 = \varphi^{-1}(0,0,1,0)$ et $P_4 = \varphi^{-1}(0,0,0,1)$.

2.2 Soit $P_1 = 1 - P_3$ et P_2 défini par : $P_2(x) = -P_4(h-x)$. Vérifier que $P_1 = \varphi^{-1}(1,0,0,0)$ et que $P_2 = \varphi^{-1}(0,1,0,0)$.

3.1. Montrer que la famille des quatre polynômes $\{P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4\}$ est une base de E.

3.2. Calculer pour i élément de $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ l'intégrale $\int_0^h P_i(t)\,dt$

4. Soit un élément Q de E. Déterminer ses coordonnées dans la base $\{P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4\}$.

En déduire la relation, pour Q élément de E : $\int_0^h Q(t)\,dt = \frac{h}{2}(Q(0)+Q(h)) + \frac{h^2}{12}(Q'(0)-Q'(h))$

Partie C : Majorations

Soit a un réel strictement positif et φ et g une application de $[0,\ a]$ vers **R** possédant des dérivées continues au moins jusqu'à l'ordre 4 sur $[0,\ a]$. Soit h appartenant à $]0,\ a]$ et Q_h l'élément de E ayant même valeur et même nombre dérivé que g en 0 et h.

1. Montrer que g est intégrable sur $[0,\ h]$ et, en utilisant les résultats de la partie **A**, que : $\int_0^h g(t)dt - \int_0^h Q_h(t)dt = \int_0^h g(t)dt - \frac{h}{2}(g(0)+g(h)) - \frac{h^2}{12}(g'(0)-g'(h))$

2. Pour tout u de $[0,\ a]$, on pose : $\Psi(u) = \int_0^u g(t)dt - \frac{u}{2}(g(0)+g(u)) - \frac{u^2}{12}(g'(0)-g'(u))$. Montrer que l'application Ψ ainsi définie est dérivable au moins jusqu'à l'ordre 3 sur $[0,\ a]$, que $\Psi(0)=\Psi'(0)=\Psi''(0)=0$ et que $(\forall u \in [0,\ a]),\ \Psi^{(3)}(u) = \frac{u^2}{12} g^{(4)}(u)$

3. On pose : $M = \sup_{t\in[0,\ a]} \left(\left|g^{(4)}(t)\right|\right)$. Montrer successivement que :

$(\forall x \in [0,\ a])\ \left|\Psi''(x)\right| \le M \frac{x^3}{36}$

$(\forall y \in [0,\ a])\ \left|\Psi'(y)\right| \le M \frac{y^4}{144}$

$(\forall z \in [0,\ a])\ \left|\Psi(z)\right| \le M \frac{z^5}{720}$

4. Montrer en utilisant les questions précédentes qu'il existe un réel μ vérifiant $|\mu| \le M \frac{a^5}{720}$ tel que : $\int_0^a g(t)dt = \frac{a}{2}(g(0)+g(a)) + \frac{a^2}{12}(g'(0)-g'(a)) + \mu$

2. Eléments de correction

Partie A

1. En tant que fonction rationnelle, *f* est définie et de classe C^∞ sur tout intervalle où son dénominateur ne s'annule pas. Elle est donc *a fortiori* dérivable sur $\left]-1,\ +\infty\right[$.

2. La fonction *f* prend, respectivement, les valeurs 1 et $\frac{1}{2}$ en zéro et en 1. Sa fonction dérivée est la fonction $f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, elle prend, respectivement, les valeurs -1 et $-\frac{1}{4}$ en zéro et en 1

Soit $P(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ un polynôme recherché. Son polynôme dérivé est $P'(x) = 3a\,x^2 + 2b\,x + c$

Ses coefficients vérifient le système : $\begin{cases} d = 1 \\ c = -1 \\ a + b + c + d = \frac{1}{2} \\ 3a + 2b + c = -\frac{1}{4} \end{cases}$, système qui admet un unique quadruplet solution, le quadruplet $\left(-\frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ -1,\ 1\right)$. Il existe un et un seul polynôme possédant les propriétés requises, le polynôme $P(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x^2 - x + 1$

3. $k(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x - 1 = f(x) - P(x)$.

Factorisation : $k(x) = \frac{x^2(1-x)^2}{4(x+1)}$, fonction positive sur $\left]-1,\ +\infty\right[$.

Pour tout réel *x* de cet intervalle, $f(x) \geq P(x)$, C_f est toujours au dessus de C_P, ces courbes étant tangentes en leurs points d'abscisses 0 et 1.

4. Pour $x \in [0,\ 1]$, $1 \leq 1 + x \leq \frac{1}{2}$ et $\frac{x^2(1-x)^2}{4} \leq \frac{x^2(1-x)^2}{4(x+1)} \leq \frac{x^2(1-x)^2}{8}$. et les intégrales de ces fonctions sur $[0,\ 1]$ sont dans le même ordre.

Vu que $\int_0^1 x^2(1-x)^2\,dx = \int_0^1 \left(x^2 - 2x^3 + x^2\right)dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{30}$, on obtient : $\frac{1}{240} \leq \int_0^1 k(x)dx \leq \frac{1}{120}$

5. $\int_0^1 f(x)dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$ et $\int_0^1 P(x)dx = \left[-\frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 = \frac{11}{16}$

6. $\int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 P(x)dx = \int_0^1 k(x)dx$ et par conséquent $\frac{1}{240} \leq \ln 2 - \frac{11}{16} \leq \frac{1}{120}$. On obtient $\frac{166}{240} \leq \ln 2 \leq \frac{167}{120}$.

L'entier *n* recherché est 166.

Partie B

1. E est un espace vectoriel de dimension 4 dont une base (la base canonique) est l'ensemble des quatre monômes $\{x^3,\ x^2,\ x,\ 1\}$

Il est facile de vérifier que pour tout couple de polynômes $(P,\ Q)$ de E et tout couple $(a,\ b)$ de réels : $\varphi(aP+bQ)=a\,\varphi(P)+b\,\varphi(Q)$ ce qui établit la linéarité de φ.

Puisque les deux espaces E et $\mathbf{R}^4$ ont la même dimension, φ est bijective si et seulement si elle est injective ou surjective.

Etudions son éventuelle injectivité. Soit P un polynôme appartenant à $\ker\varphi$ c'est-à-dire tel que : $P(0)=P'(0)=P(h)=P'(h)$. Les deux réels distincts 0 et h sont l'un et l'autre au moins racines doubles. L'unique polynôme de E ayant cette propriété est le polynôme nul, puisque un polynôme du troisième degré ne peut avoir, au plus, que trois racines, comptées avec leur ordre de multiplicité. Ainsi, $\ker\varphi$ ne contient que le polynôme nul, φ est injective, donc bijective.

2.1. Soit φ^{-1} la bijection réciproque de φ et $P_3=\varphi^{-1}(0,0,1,0)$ et $P_4=\varphi^{-1}(0,0,0,1)$.
$P_3(0)=P'_3(0)=0$; $P_4(0)=P'_4(0)=0$: Les deux polynômes P_3 et P_4 admettent zéro pour racine double, ils sont tous deux de la forme $P(x)=x^2(a\,x+b)$.

Pour un tel polynôme : $\begin{cases} P(h)=a\,h^3+b\,h^2 \\ P'(h)=3a\,h^2+2b\,h \end{cases}$.

En particulier dans le cas de P_3 : $\begin{cases} a\,h^3+b\,h^2=1 \\ 3a\,h^2+2b\,h=0 \end{cases}$ de sorte que : $\begin{cases} a=-\dfrac{2}{h^3} \\ b=\dfrac{3}{h^2} \end{cases}$ et

$$P_3(x)=\frac{x^2}{h^3}(3h-2x)=-\frac{2}{h^3}x^3+\frac{3}{h^2}x^2$$

Dans le cas de P_4 : $\begin{cases} a\,h^3+b\,h^2=0 \\ 3a\,h^2+2b\,h=1 \end{cases}$ de sorte que : $\begin{cases} a=\dfrac{1}{h^2} \\ b=-\dfrac{1}{h} \end{cases}$ et $P_4(x)=\dfrac{1}{h^2}x^3-\dfrac{1}{h}x^2$ (h en est racine simple).

2.2. Soit $P_1=1-P_3$. Alors : $P_1(0)=1-P_3(0)=1$; $P_1(h)=1-P_3(h)=0$ et par ailleurs : $P'_1(x)=-P_3(x)$; en conséquence : $P'_1(0)=P'_1(h)=0$. Ainsi, par unicité de l'image réciproque d'un élément de $\mathbf{R}^4$: $P_1=\varphi^{-1}(1,0,0,0)$

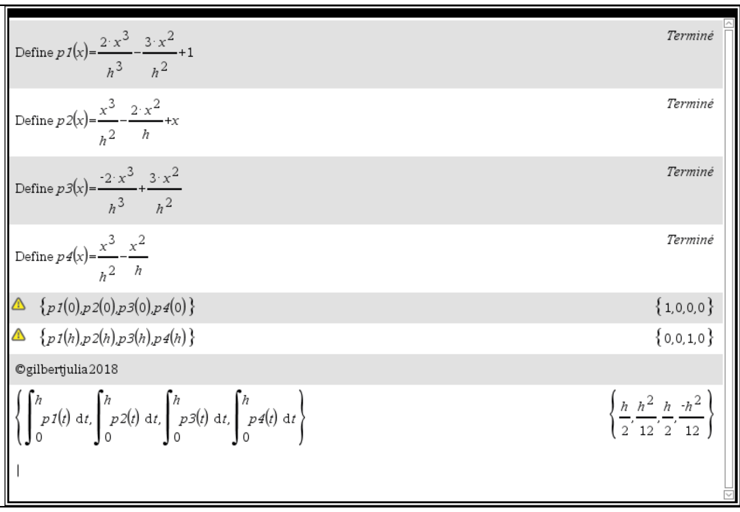
Soit P_2 défini par : $P_2(x)=-P_4(h-x)$. Alors : $P_2(0)=-P_4(h)=0$ et $P_2(h)=-P_4(0)=0$. Par ailleurs : $P'_2(x)=P'_4(h-x)$, en particulier $P'_2(0)=P'_4(h)=1$ et $P'_2(h)=P'_4(0)=0$. Ainsi par unicité de l'image réciproque d'un élément de $\mathbf{R}^4$: $P_2=\varphi^{-1}(0,1,0,0)$

Les deux polynômes P_1 et P_2 en question sont définis, respectivement, par :

$$\begin{cases} P_1(x) = \dfrac{2}{h^3}x^3 - \dfrac{3}{h^2}x^2 + 1 \\ P_2(x) = -\dfrac{1}{h^2}x^3 + \dfrac{2}{h}x^2 - x \end{cases}.$$

Et on rappelle :

$$\begin{cases} P_3(x) = -\dfrac{2}{h^3}x^3 + \dfrac{3}{h^2}x^2 \\ P_4(x) - \dfrac{1}{h^2}x^3 + \dfrac{1}{h}x^2 \end{cases}$$



Pour information, la matrice de l'application linéaire φ dans les bases canoniques est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ h^3 & h^2 & h & 1 \\ 3h^2 & 2h & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Sa matrice inverse, à savoir : $M = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{h^3} & \dfrac{1}{h^2} & -\dfrac{2}{h^3} & \dfrac{1}{h^2} \\ -\dfrac{3}{h^2} & -\dfrac{2}{h} & \dfrac{3}{h^2} & -\dfrac{1}{h} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, dont on peut déléguer le calcul à un logiciel de calcul formel, est la matrice de passage de la base canonique $\{x^3,\ x^2,\ x,\ 1\}$ à la nouvelle base,. Elle donne, en colonnes, les coordonnées des quatre polynômes $(P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4)$ dans la base canonique $\{x^3,\ x^2,\ x,\ 1\}$, on pourra vérifier ces résultats.

3. La famille des quatre polynômes $(P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4)$, en tant qu'image d'une base par une application linéaire bijective (l'application φ^{-1}), constitue une base de E. Tout polynôme de E s'écrit comme une combinaison linéaire de ces polynômes, et cela d'une seule manière.

Soit Q un polynôme de E, défini par : $Q(x) = \alpha P_1(x) + \beta P_2(x) + \gamma P_3(x) + \delta P_4(x)$, c'est-à-dire ayant pour coordonnées $(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)$ dans la base $(P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4)$. Alors le calcul dans cette base des valeurs de Q et de son nombre dérivé en zéro et en h montre que : $\alpha = Q(0)$; $\beta = Q'(0)$; $\gamma = Q(h)$; $\delta = Q'(h)$ et que par conséquent : $Q(x) = Q(0)P_1(x) + Q'(0)P_2(x) + Q(h)P_3(x) + Q'(h)P_4(x)$

On note que les deux expressions du polynôme Q, $Q(x)=a\,x^3+b\,x^2+c\,x+d$ dans la base canonique et celle ci-dessus dans la base $(P_1,\,P_2,\,P_3,\,P_4)$ sont bien identiques.	Define $p4(x)=\frac{x^3}{h^2}-\frac{x^2}{h}$ — Terminé $\{p1(0),p2(0),p3(0),p4(0)\}$ — $\{1,0,0,0\}$ $\{p1(h),p2(h),p3(h),p4(h)\}$ — $\{0,0,1,0\}$ ©gilbertjulia2018 $\left\{\int_0^h p1(t)\,dt, \int_0^h p2(t)\,dt, \int_0^h p3(t)\,dt, \int_0^h p4(t)\,dt\right\}$ — $\left\{\frac{h}{2},\frac{h^2}{12},\frac{h}{2},\frac{-h^2}{12}\right\}$ Define $q(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d$ — Terminé Define $dq(x)=3\cdot a\cdot x^2+2\cdot b\cdot x+c$ — Terminé $q(0)\cdot p1(x)+dq(0)\cdot p2(x)+q(h)\cdot p3(x)+dq(h)\cdot p4(x)$ — $a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d$
Pour information, coordonnées dans la base canonique	Define $m=\frac{\begin{bmatrix}2 & -h & -2 & -h\\ -3\cdot h & 2\cdot h^2 & 3\cdot h & h^2\\ 0 & -h^3 & 0 & 0\\ h^3 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}{h^3}$ — Terminé m^{-1} — $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ h^3 & h^2 & h & 1\\ -3\cdot h^2 & -2\cdot h & -1 & 0\end{bmatrix}$ ©gilbertjulia2018 $m^{-1}\cdot\begin{bmatrix}q(0)\\ dq(0)\\ q(h)\\ dq(h)\end{bmatrix}$ — $\begin{bmatrix}dq(h)\\ -q(h)\\ q(h)\cdot h+dq(h)+h^3\cdot q(0)+h^2\cdot dq(0)\\ -q(h)-3\cdot h^2\cdot q(0)-2\cdot h\cdot dq(0)\end{bmatrix}$ ⚠Le domaine du résultat peut être plus grand que le domaine de l'en…

4. $\int_0^h P_1(t)\,dt=\int_0^h P_3(t)\,dt=\frac{h}{2}$ et $\int_0^h P_2(t)\,dt=-\int_0^h P_4(t)\,dt=\frac{h^2}{12}$

5. $\int_0^h Q(t)\,dt=_{gilbertjulia2018}\int_0^h \left(Q(0)P_1(t)+Q'(0)P_2(t)+Q(h)P_3(t)+Q'(h)P_4(t)\right)dt$

Par linéarité de l'intégrale : $\int_0^h Q(t)\,dt=Q(0)\int_0^h P_1(t)\,dt+Q'(0)\int_0^h P_2(t)\,dt+Q(h)\int_0^h P_3(t)\,dt+Q'(h)\int_0^h P_4(t)\,dt$

On obtient : $\int_0^h Q(t)\,dt=_{gj}\ Q(0)\frac{h}{2}+Q'(0)\frac{h^2}{12}+Q(h)\frac{h}{2}-Q'(h)\frac{h^2}{12}$, c'est-à-dire la formule de l'énoncé.

Partie C

Soit a un réel strictement positif et φ et g une application de $[0,\ a]$ vers **R** possédant des dérivées continues au moins jusqu'à l'ordre 4 sur $[0,\ a]$. Soit h appartenant à $]0,\ a]$ et Q_h l'élément de E ayant même valeur et même nombre dérivé que g en 0 et h.

1. g est par hypothèse de classe C^4 sur l'intervalle $[0,\ a]$, elle est de classe C^4 sur tout intervalle contenu dans $[0,\ a]$, en particulier sur $[0,\ h]$. Etant dérivable sur cet intervalle, g y est *a fortiori* continue, elle est intégrable sur $[0,\ h]$.

2. Pour tout u de $[0,\ a]$, on pose : $\Psi(u)=\int_0^u g(t)\,dt-\frac{u}{2}\left(g(0)+g(u)\right)-\frac{u^2}{12}\left(g'(0)-g'(u)\right)$.

g est par hypothèse de classe C^4. L'application $u\mapsto\int_0^u g(t)\,dt$ est de classe C^5 sur $[0,\ a]$, et la dérivée de g est de classe C^3 sur ce même intervalle.

La fonction Ψ ainsi définie est au moins de classe C^3, la classe « la moins sophistiquée », celle de la fonction dérivée de g. Elle est continûment dérivable au moins jusqu'à l'ordre 3 sur $[0,\ a]$.

Par construction, cette fonction s'annule en zéro.

Dérivée première : $\Psi'(u)=g(u)-\frac{1}{2}\left(g(0)+g(u)+u\,g'(u)\right)-\frac{1}{12}\left(2u\left(g'(0)-g'(u)\right)-u^2\,g''(u)\right)$ c'est-à-dire :

$\Psi'(u)=\frac{1}{2}\left(g(u)-g(0)\right)-\frac{u}{6}\left(\left(2\,g'(u)+g'(0)\right)\right)+\frac{u^2}{12}g''(u)$, fonction qui s'annule en zéro.

Dérivée seconde : $\Psi''(u)=\frac{1}{2}g'(u)-\frac{1}{6}\left(2\,g'(u)+g'(0)+2u\,g''(u)\right)+\frac{1}{12}\left(2u\,g''(u)+u^2\,g^{(3)}(u)\right)$ c'est-à-dire : $\Psi''(u)=\frac{1}{6}\left(g'(u)-g'(0)\right)-\frac{u}{6}g''(u)+\frac{u^2}{12}g^{(3)}(u)$, fonction qui s'annule en zéro.

Dérivée troisième : $\Psi^{(3)}(u)=\frac{1}{6}g''(u)-\frac{1}{6}\left(g''(u)+u\,g^{(3)}(u)\right)+\frac{1}{12}\left(2u\,g^{(3)}(u)+u^2\,g^{(4)}(u)\right)$

c'est-à-dire : $\Psi^{(3)}(u)=\frac{u^2}{12}g^{(4)}(u)$

3. On pose : $M=\sup_{t\in[0,\ a]}\left(\left|g^{(4)}(t)\right|\right)$.

Soit x un réel quelconque de l'intervalle $[0,\ a]$.

En intégrant sur l'intervalle $[0,\ x]$ la fonction dérivée troisième de Ψ, on obtient : $\Psi''(x)-\Psi''(0)=\int_0^x\Psi^{(3)}(t)\,dt$ et vu que la dérivée seconde s'annule en zéro : $\Psi''(x)=\int_0^x\Psi^{(3)}(t)\,dt$.

En utilisant sur cet intervalle la majoration $\left|\Psi^{(3)}(t)\right|\le M\,\frac{t^2}{12}$:

$\left|\int_0^x\Psi^{(3)}(t)\,dt\right|\le\int_0^x\left|\Psi^{(3)}(t)\right|dt\le\frac{M}{12}\int_0^x t^2\,dt=\frac{M}{36}x^3$, et ce quelque soit x de $[0,\ a]$.

Soit y un réel quelconque de l'intervalle $[0,\ a]$.

En intégrant sur l'intervalle $[0,\ y]$ la fonction dérivée deuxième de Ψ, on obtient : $\Psi'(y)-\Psi'(0)=\int_0^y \Psi''(x)dx$ et vu que la dérivée s'annule en zéro : $\Psi'(y)=\int_0^x \Psi''(x)dx$.

En utilisant sur cet intervalle la majoration $\left|\Psi''(x)\right| \leq M\,\dfrac{x^3}{36}$:

$$\left|\Psi'\right|(y)=\left|\int_0^y \Psi''(x)dx\right| \leq \int_0^y \left|\Psi''(x)\right|dx \leq_{gjulia} \frac{M}{36}\int_0^y x^3\,dx=\frac{M}{144}\,y^4$$, et ce quelque soit y de $[0,\ a]$.

Soit z un réel quelconque de l'intervalle $[0,\ a]$.

En intégrant sur l'intervalle $[0,\ z]$ la fonction dérivée de Ψ, on obtient : $\Psi(z)-\Psi(0)=\int_0^z \Psi'(y)dy$ et vu que la dérivée seconde s'annule en zéro : $\Psi(z)=\int_0^z \Psi'(y)dy$.

En utilisant sur cet intervalle la majoration $\left|\Psi'(y)\right| \leq M\,\dfrac{y^4}{144}$:

$$\left|\Psi(z)\right|=\left|\int_0^z \Psi'(y)dx\right| \leq \int_0^z \left|\Psi'(y)\right|dy \leq \frac{M}{144}\int_0^z y^4\,dy=\frac{M}{720}\,z^5$$, et ce quelque soit z de $[0,\ a]$.

4. En particulier, lorsque $z=a$, on obtient l'inégalité : $\left|\Psi(a)\right| \leq \dfrac{M}{720}a^5$, avec : $\Psi(a)=\int_0^a g(t)dt-\dfrac{a}{2}\left(g(0)+g(a)\right)-\dfrac{a^2}{12}\left(g'(0)-g'(a)\right)$. Il existe un réel μ vérifiant $|\mu| \leq_{gj} M\,\dfrac{a^5}{720}$ tel que $\Psi(a)=\mu =_{gjulia} \int_0^a g(t)dt-\dfrac{a}{2}\left(g(0)+g(a)\right)-\dfrac{a^2}{12}\left(g'(0)-g'(a)\right)$ ou ce qui revient au même tel que : $\int_0^a g(t)dt=\dfrac{a}{2}\left(g(0)+g(a)\right)-\dfrac{a^2}{12}\left(g'(0)-g'(a)\right)+\mu$