Nancy-Metz terminale C 1979 : comparaison des trois moyennes

Le problème Nancy-Metz C 1979 a pour objectif une comparaison des trois moyennes usuelles. Suivent deux applications.

.1. Le sujet

A. Un résultat préliminaire

Démontrer que quel que soit le réel strictement positif x : $\ln x \leq x-1$. **(1)**

Cas d'égalité ?

B. Comparaison des trois moyennes usuelles

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. À tout n-uplet $(a_1, a_2, ..., a_n)$ de réels strictement positifs, on associe les trois nombres réels u, v, w ainsi définis : $\begin{cases} u = \dfrac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n) \\ v = \sqrt[n]{a_1\, a_2 ... a_n} \\ \dfrac{n}{w} = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + ... + \dfrac{1}{a_n} \end{cases}$. Les trois nombres u, v, w sont respectivement les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique des n nombres $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

1. En appliquant l'inégalité **(1)** successivement pour $x = \dfrac{a_1}{u}$; $x = \dfrac{a_2}{u}$;...; $x = \dfrac{a_n}{u}$ et en combinant les n inégalités ainsi obtenues, montrer que $v \leq u$ **(2)**. Dans quel cas a-t-on $v = u$?

2. En remplaçant dans **(2)** les n nombres $(a_1, a_2, ..., a_n)$ par leurs inverses, montrer que $w \leq v$. **(3)**
Dans quel cas a-t-on $w = v$?

C. Une première application.

Soit x un réel supérieur ou égal à zéro. On prend $n = 2$; $a_1 = 1$; $a_2 = x$

Dans ce cas, les inégalités **(2)**et **(3)** donnent $\dfrac{2x}{1+x} \leq \sqrt{x} \leq \dfrac{1+x}{2}$. On se propose de prendre comme valeur approchée de $\sqrt{x}$ la moyenne arithmétique $m(x)$ des nombres $\dfrac{2x}{1+x}$ et $\dfrac{1+x}{2}$

1. Etudier les variations de la fonction $x \xrightarrow{g} g(x) = m(x) - \sqrt{x}$ sur $[0\ ;\ +\infty[$

2. En déduire que pour $\dfrac{1}{2} \leq x \leq 2$, $0 \leq m(x) - \sqrt{x} \leq \dfrac{3}{1000}$

D. Une deuxième application.

1. Montrer que pour tout entier n strictement positif : $\sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}$

2. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$ et en déduire l'inégalité $\frac{n}{1+\ln n} \leq \sqrt[n]{n!}$

Fin du sujet Nancy-Metz 1979.

On remarque que de la « deuxième application », on peut déduire un encadrement de la factorielle de n. Cet encadrement a le mérite d'exister (il peut donner une vague idée de l'ordre de grandeur d'une factorielle) mais n'est certes pas d'une grande qualité (ce n'était pas l'objectif du problème). J'ajoute une autre partie, qui n'a rien à voir avec le thème du présent sujet, mais qui aboutit à un encadrement de meilleure qualité.

E. Un meilleur encadrement de la factorielle de n

On considère dans cette partie la fonction f : $x \in [1, +\infty[\xrightarrow{f} f(x) = \ln x \in [0, +\infty[$ et on note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

On admet que f est une fonction concave (sa dérivée seconde est en effet la fonction $x \in [1, +\infty[\xrightarrow{f''} f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ qui est strictement négative sur tout l'ensemble de définition). Sa représentation graphique C_f est de ce fait au dessous de ses tangentes et au dessus de ses sécantes. On utilisera sans autre démonstration cette propriété.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2 on désigne par I_n l'intégrale : $I_n = \int_1^n \ln x \, dx$.

Pour tout entier k tel que $2 \leq k \leq n$ on désigne par u_k l'intégrale : $u_k = \int_{k-1}^{k} \ln x \, dx$. On désigne d'autre part par H_k le point de coordonnées $(k, 0)$ et par M_k le point de C_f d'abscisse k.

1.1. Calculer la valeur exacte de I_n.

1.2. Quelle relation y a-t-il entre I_n et la somme $\sum_{k=2}^{n} u_k$?

2.1. En utilisant la concavité de la courbe C_f, comparer u_k à l'aire du trapèze $H_{k-1}H_kM_kM_{k+1}$.

2.2. La tangente à C_f en M_k coupe la droite d'équation $x = k-1$ au point noté N_{k-1}. Calculer les coordonnées de ce point. En utilisant la concavité de la courbe C_f, comparer u_k à l'aire du trapèze $H_{k-1}H_kM_kN_{k-1}$.

2.3. En déduire l'encadrement : $\sum_{k=2}^{k=n} (\ln k) - \frac{1}{2}\ln n \leq I_n \leq \sum_{k=2}^{k=n} (\ln k) - \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k}\right)$

4. En déduire un encadrement de la factorielle de n. On pourra utiliser, si besoin est, l'inégalité : $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \geq \ln(n+1) - 1$

2. Eléments de correction

A. On définit sur l'intervalle $]0,+\infty[$ la fonction : $x \xrightarrow{u} u(x)=x-1-\ln x$, fonction dérivable sur $]0,+\infty[$. Sa dérivée est la fonction définie par $u'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$, du signe de $(x-1)$. La fonction u est strictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$. Elle admet en 1 un minimum absolu, $u(1)=0$. Cette fonction est donc positive sur $]0,+\infty[$ et ne s'annule qu'au point 1. Il en résulte que quel que soit x de l'intervalle $]0,+\infty[$, $\ln x \le x-1$, l'égalité n'ayant lieu que si $x=1$

B. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. À tout n-uplet $(a_1, a_2, ..., a_n)$ de réels strictement positifs, on associe les trois moyennes u, v, w.

1. En appliquant l'inégalité **(1)** pour $x=\dfrac{a_1}{u}$; $x=\dfrac{a_2}{u}$;...; $x=\dfrac{a_n}{u}$, on obtient successivement, pour chaque entier $i\in\{1,2,...,n\}$: $\ln\left(\dfrac{a_i}{u}\right)\le\dfrac{a_i}{u}-1$.

En additionnant membre à membre les n inégalités ainsi obtenues, on obtient : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{a_i}{u}\le\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{u}-n$ d'où on déduit en divisant par n : $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{a_i}{u}-\ln u\le\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i}{u}-1=\frac{u}{u}-1=0$ c'est-à-dire : $\ln\left(\dfrac{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}}{u}\right)=\ln\left(\dfrac{v}{u}\right)\le 0$ et finalement par passage à l'exponentielle (qui conserve le sens des inégalités) : $\dfrac{v}{u}\le 1$ puis $v\le u$.

NB. Les deux premières étapes du calcul reviennent à considérer les moyennes arithmétiques respectives d'une part des nombres $\ln\left(\dfrac{a_i}{u}\right)$ et d'autre part des nombres $\dfrac{a_i}{u}-1$: lorsque une suite finie est, terme à terme, plus petite qu'une autre, leurs moyennes arithmétiques sont classées dans le même ordre.

Cas d'égalité :

Si les n nombres a_j sont tous égaux, il est clair que leurs trois moyennes coïncident.

S'ils ne sont pas tous égaux, au moins un des $\dfrac{a_j}{u}$ n'est pas égal à 1 (par exemple le plus petit des a_j est alors strictement plus petit que leur moyenne), et alors une au moins des inégalités ajoutées membre à membre est stricte : leur somme membre à membre est une égalité stricte.

Donc $v=u$ si et seulement si les a_j sont tous égaux.

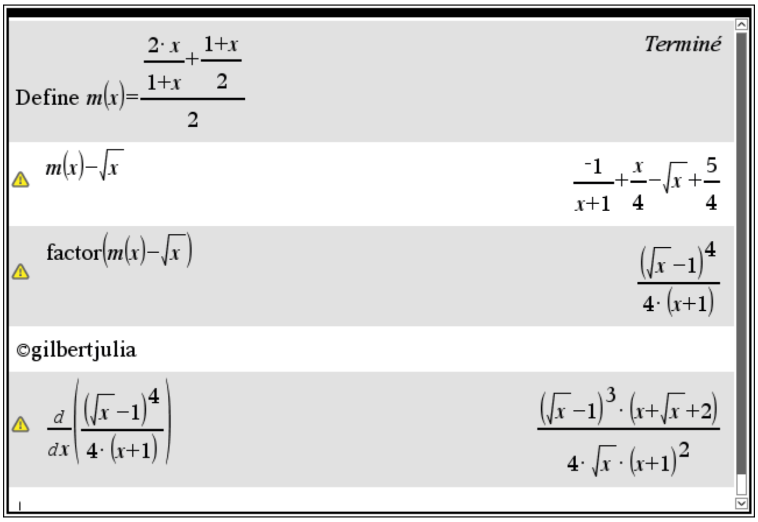
2. En remplaçant dans **(2)** les n nombres $(a_1, a_2, ..., a_n)$ par leurs inverses : $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$, ce qui donne $\frac{1}{v} \le \frac{1}{n}.\left(\frac{n}{w}\right) = \frac{1}{w}$ et par suite $w \le v$.

Il y a égalité si et seulement si tous les $\frac{1}{a_i}$ sont égaux, c'est-à-dire si et seulement si tous les a_i sont égaux.

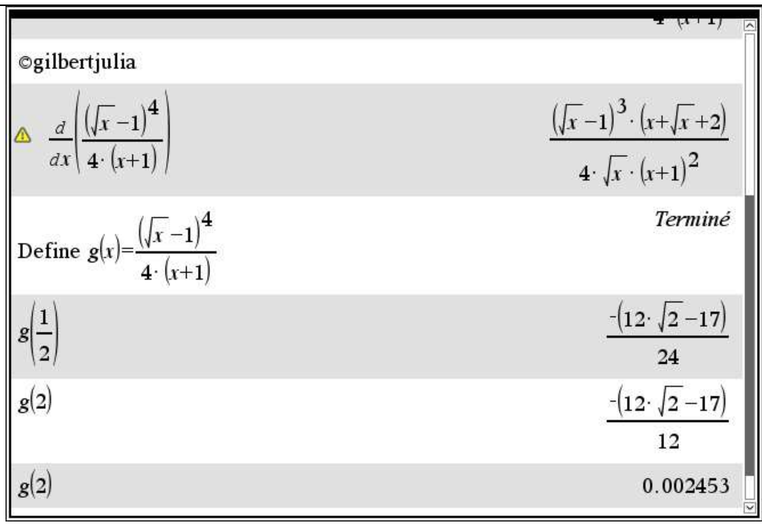
C. La fonction g est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$.

$m(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{1+x} + \frac{1+x}{2}\right) = \frac{x^2+6x+1}{4(x+1)}$

Un logiciel de calcul formel montre que : $m(x) - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x}-1)^4}{4(x+1)}$ puis que : $(m(x)-\sqrt{x})' \underset{gjulia}{=} \frac{(\sqrt{x}-1)^3(x+\sqrt{x}+2)}{4\sqrt{x}(x+1)^2}$; cette dérivée est du signe de $\sqrt{x}-1$, c'est-à-dire du signe de $x-1$. La fonction $x \xrightarrow{g} g(x) = m(x) - \sqrt{x}$ est strictement décroissante sur $]0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Elle admet en 1 un minimum absolu, qui est égal à zéro. Il s'agit d'une fonction positive sur son ensemble de définition.



La restriction de g à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ est positive ou nulle (nulle en 1) et atteint son maximum en l'une ou l'autre des deux extrémités. Le calcul montre que $g(2) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17-12\sqrt{2}}{12}$ et que $0{,}0024 < \frac{17-12\sqrt{2}}{12} < 0{,}0025$. On peut en conclure que, sur cet intervalle : $0 \le m(x) - \sqrt{x} \underset{gilbertjulia}{\le} \frac{25}{10000}$, un petit peu mieux que l'inégalité demandée.



Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ L'approximation rationnelle de la fonction racine carrée proposée est une approximation par défaut à moins de trois millièmes près. On reconnaît notamment : $m(2) = \frac{17}{12}$, une approximation rationnelle de $\sqrt{2}$ que les Babyloniens, ainsi que Héron d'Alexandrie paraît-il, utilisaient déjà.

D. Une deuxième application.

1. Si on considère la suite des n premiers entiers : $a_i = i$ pour $i = 1, 2, ..., n$, leur moyenne arithmétique est : $u = \frac{1}{n} \times (1 + 2 + ... + n) = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$ et leur moyenne géométrique est : $v = \sqrt[n]{(1 \times 2 \times ... \times n)} = \sqrt[n]{(n!)}$

Par conséquent : $\sqrt[n]{(n!)} < \frac{n+1}{2}$, l'inégalité étant stricte puisque les a_i sont distincts.

2. Leur moyenne harmonique w est telle que : $\frac{n}{w} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$. Ainsi $w = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$.

Vu que : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$ (démonstration ci-dessous), on obtient : $w \geq \frac{n}{1 + \ln n}$ et *a fortiori*, $v > w \geq \frac{n}{1 + \ln n}$

En fin de compte, $\frac{n}{1+\ln n} < \sqrt[n]{(n!)}_{gj} < \frac{n+1}{2}$.

Comme le montre le tableur ci-contre, les trois moyennes (colonnes B, C et E) sont significativement différentes.

Tout ceci amène à l'encadrement de la factorielle :

$$\frac{n^n}{(1+\ln n)^n} < (n!)_{gjulia} < \frac{(n+1)^n}{2^n}.$$

	A num	B geom	C arith	D	E harmo	F	G
=		=seq(root(n!,n),	=seq((n+1	=seq(n/(1+ln(n)	=seq(n/(∑(1/k,k,		
1	1.	1.	1.	1.	1.	gilbert	
2	2.	1.414213562	1.5	1.181232218	1.333333333	julia	
3	3.	1.817120593	2.	1.429516074	1.636363636	2018.	
4	4.	2.213363839	2.5	1.676239137	1.92		
5	5.	2.605171085	3.	1.916121467	2.189781022		
6	6.	2.993795166	3.5	2.149182287	2.448979592		
7	7.	3.380015159	4.	2.376175662	2.699724518		
8	8.	3.7643506	4.5	2.597873638	2.943495401		
9	9.	4.147166274	5.	2.814941454	3.181371861		
10	10.	4.528728688	5.5	3.027931066	3.414171521		
11	11.	4.90923878	6.	3.237298126	3.642532045		
12	12.	5.288851994	6.5	3.443420787	3.866962718		

A12 =12.

Démonstration de l'inégalité $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$ *:*

Soit k un entier tel que $2 \leq k \leq n$.

$$\left(\forall x \in [k-1,\ k],\ \frac{1}{k} \leq \frac{1}{x} \right) \Rightarrow \left(\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k} dx \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx \right)$$

Or : $\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx = \ln k - \ln(k-1)$ et $\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k} dx = \frac{1}{k}$. Donc $\frac{1}{k} \leq \ln k - \ln(k-1)$ pour tout k tel que $2 \leq k \leq n$.

Par sommation : $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} (\ln k - \ln(k-1))$ ce qui donne : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} \leq \ln n$ soit $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} \leq 1 + \ln n$

E. Un meilleur encadrement de la factorielle de n

1. $I_n = \int_1^n \ln x\,dx = [x\ln x - x]_1^n = n\ln n - n + 1$.

Cette intégrale représente « l'aire sous la courbe », aire du domaine Δ_n délimité par Ox, C_f et la droite d'équation $x = n$. Quant à u_k, il représente « l'aire sous la courbe », celle de la portion du domaine Δ_n située dans la bande $k-1 \leq x \leq k$.

Le découpage en bandes de largeur 1 du domaine Δ_n réalise une partition de ce domaine en $(n-1)$ morceaux.

L'aire de Δ_n est la somme des aires de ces $(n-1)$ morceaux : $\sum_{k=2}^{n} u_k = I_n$

2. Compte tenu de la concavité de la courbe C_f, cette courbe est au dessus de ses sécantes, le trapèze $H_{k-1}H_kM_kM_{k+1}$ est inclus dans le morceau du domaine Δ_n situé dans la bande $k-1 \leq x \leq k$. Son aire est plus petite que l'aire de ce morceau.

Ainsi : $\frac{1}{2}(\ln(k-1) + \ln k) \leq u_k$

La tangente à C_f en M_k a pour équation : $y - \ln k = \frac{1}{k}(x-k)$. Elle coupe la droite d'équation $x = k-1$ au point $N_{k-1}\left(k-1,\ \ln k - \frac{1}{k}\right)$. Compte tenu de la concavité de la courbe C_f, cette courbe est au dessous de ses tangentes : le « morceau » contient le trapèze $H_{k-1}H_kM_kN_{k-1}$ et son aire est plus grande que celle de $H_{k-1}H_kM_kN_{k-1}$.

L'aire de ce trapèze est : $\frac{1}{2}\left(\ln k + \left(\ln k - \frac{1}{k}\right)\right) = \ln k - \frac{1}{2k}$. Ce qui donne : $u_k \leq \ln k - \frac{1}{2k}$

D'où l'encadrement : $\frac{1}{2}(\ln(k-1) + \ln k) \leq u_k \leq \ln k - \frac{1}{2k}$

Par sommation : $\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{k=n}(\ln(k-1) + \ln k) \leq I_n \leq \sum_{k=2}^{k=n}\left(\ln k - \frac{1}{2k}\right)$ soit aussi :

$$\sum_{k=2}^{k=n-1}(\ln k) + \frac{1}{2}\ln n \leq I_n \leq \sum_{k=2}^{k=n}\left(\ln k - \frac{1}{2k}\right)$$

On en déduit : $\sum_{k=2}^{k=n}(\ln k) - \frac{1}{2}\ln n \leq n\ln n - n + 1 \leq \sum_{k=2}^{k=n}(\ln k) - \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k}\right)$

Vu que $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \geq \ln(n+1) - 1$ (à justifier) on obtient :

$$\sum_{k=2}^{k=n}(\ln k) - \frac{1}{2}\ln n \leq n\ln n - n + 1 \leq \sum_{k=2}^{k=n}(\ln k) - \frac{1}{2}(\ln(n+1) - 1)$$

En regroupant en un seul logarithme : $\ln\left(\dfrac{n!}{\sqrt{n}}\right) \leq \ln\left(\left(\dfrac{n}{\mathbf{e}}\right)^n \mathbf{e}\right) \leq \ln\left(\dfrac{n!\sqrt{\mathbf{e}}}{\sqrt{n+1}}\right)$ et vu que l'exponentielle conserve l'ordre : $\left(\dfrac{n!}{\sqrt{n}}\right) \leq \left(\left(\dfrac{n}{\mathbf{e}}\right)^n \mathbf{e}\right) \leq_{\textit{gilbertjulia}2018} \left(\dfrac{n!\sqrt{\mathbf{e}}}{\sqrt{n+1}}\right)$ puis

$$\left(\sqrt{n+1}\,\sqrt{\mathbf{e}}\right)\left(\frac{n}{\mathbf{e}}\right)^n \leq n! \leq \left(\sqrt{n}\,\mathbf{e}\right)\left(\frac{n}{\mathbf{e}}\right)^n {}_{\textit{gjulia}2018}$$

Ci-contre, résultats obtenus à l'aide d'un tableur pour les premiers entiers

	A num	B	C	D	E
=	=seq(r	=num!	= √ (num)*(num/(e))^num*e	= √ (num+1)*(num/(	
1	1.	1.	1.	0.857763885	gilbert
2	2.	2.	2.08104038	1.545891096	julia
3	3.	6.	6.329004839	4.432589926	2018.
4	4.	24.	25.490979	17.28599093	
5	5.	120.	127.9844175	85.03554085	
6	6.	720.	770.0354479	504.4717741	
7	7.	5040.	5400.928261	3502.008059	
8	8.	40320.	43271.65602	27837.64783	
9	9.	362880.	389895.286	249275.4384	
10	10.	3628800.	3902560.665	2482554.346	
11	11	39916800	42960671.43	27215611.69	

D $=\sqrt{\mathbf{num}+1}\cdot\left(\dfrac{\mathbf{num}}{e}\right)^{\mathbf{num}}\cdot e^{\frac{1}{2}}$