Le modèle de Verhulst

Pierre François VERHULST (1804 – 1849) est un mathématicien belge qui publia de 1838 à 1847 plusieurs articles proposant un modèle d'évolution des populations, le modèle logistique, définissant une alternative au modèle exponentiel à croissance infinie.

Ce modèle logistique s'adapte à des situations où l'on retient deux hypothèses d'interaction : d'une part un facteur proportionnel à la valeur de la grandeur observée, d'autre part un facteur de régulation, déterminé par la différence avec une valeur fixe (cette valeur a un statut de valeur maximale).

Alors que le modèle exponentiel émet l'hypothèse d'une évolution à variation relative constante, ce modèle logistique émet l'hypothèse d'une évolution à *variation relative affine*.

Le sujet

Partie A : Modélisation continue

Selon une des hypothèses de Verhulst, on considère une situation dans laquelle la fonction non nulle $t \mapsto y(t)$ décrivant grandeur observée, étudiée sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, est telle que :

- Sa valeur initiale $y(0)=y_0$ satisfait la double inégalité : $0<y_0\leq M$
- Il existe un réel k strictement positif tel que y est solution de l'équation différentielle : $\dfrac{y'}{y}=k(M-y)$ (ce qui revient à dire que le taux de variation est fonction affine de y : de la forme $\alpha-\beta y$ où α et β sont deux constantes strictement positives, $\alpha=kM$; $\beta=-k$).

1. Résolution de l'équation différentielle.

On considère la fonction z définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $t\mapsto z(t)=\dfrac{1}{y(t)}$, inverse multiplicative de la fonction y.

1.1. Montrer que la fonction z est solution d'une équation différentielle du premier ordre de la forme : $z'=az+b$ (on explicitera a et b en fonction de k et de M).

1.2. Résoudre alors cette équation différentielle, puis déterminer la solution y de l'équation $\dfrac{y'}{y}=k(M-y)$ qui a pour valeur initiale $y(0)=y_0$ avec $0<y_0\leq M$.

(On vérifiera que cette fonction solution s'exprime ainsi : $y(t)=\dfrac{M\,y_0}{y_0+(M-y_0)\exp(-kM\,t)}$)

2. Etude de la fonction solution et allure de sa représentation graphique

2.1. Etudier le sens variations de cette fonction solution y sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et préciser son comportement asymptotique.

2.2. Montrer que sa dérivée seconde vérifie la relation : $y''=k\,y'(M-2y)$.

2.3. Soit C la courbe représentative de la fonction y dans un repère adéquat. Préciser l'allure de cette courbe. Déterminer quelle est l'abscisse de son point d'inflexion.

3. Que peut-on dire de l'évolution d'une population selon ce modèle ?

4. Application numérique
Dans cette question, on suppose que $y_0=0{,}1$; $k=0{,}185$; $M=1$.

La fonction logistique décrivant la situation est de ce fait la fonction :
$t\mapsto y(t)=\dfrac{0{,}1}{0{,}1+0{,}9\exp(-0{,}185\,t)}=\dfrac{1}{1+9\exp(-0{,}185\,t)}$ définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
On note C la courbe représentative de cette fonction dans un repère adéquat.

(Le temps est supposé être mesuré en jours).

4.1. Représenter C en précisant ses éléments remarquables.

4.2. Donner des valeurs approchée à 10^{-4} près de : $y(1)$; $y(7)$; $y(10)$.

Partie B : Modélisation discrète

Le paramètre observé est maintenant mesuré à intervalles de temps réguliers à partir d'un instant initial zéro. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ces mesures. On émet l'hypothèse que cette suite est telle que :

- Sa valeur initiale u_0 satisfait la double inégalité : $0 < u_0 \leq M$ (où M est un réel strictement positif)
- Le taux de variation entre deux mesures consécutives est proportionnel à l'écart avec la valeur M, c'est-à-dire qu'il existe un réel strictement positif k tel que pour tout entier naturel n : $\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n} = k(M-u_n)$

1. Montrer que les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfont une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = a.u_n + b.u_n^{\,2}$ où a et b sont des constantes réelles que l'on exprimera en fonction de k et de M.

Il s'avère que ce type de suites récurrentes, sous son aspect bonhomme, est quelque peu déconcertant. Plutôt qu'une étude générale peu rémunératrice, nous allons étudier quelques cas particuliers. Nous allons voir à cette occasion qu'une modélisation discrète doit être considérée avec quelques précautions.

Pour cela, nous allons reprendre l'application numérique de la partie précédente, modélisée continûment par la fonction $t \mapsto y(t) = \dfrac{1}{1+9\exp(-0{,}185\,t)}$ définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Imaginons trois modélisateurs qui souhaitent étudier discrètement cette même situation.

2. Le premier d'entre eux envisage de mesurer le paramètre étudié une fois par jour. Il choisit pour valeur de k l'arrondi au dix millième de $\dfrac{y(1)-y(0)}{(M-y(0))y(0)} = \dfrac{y(1)-y(0)}{0{,}9.y(0)}$, c'est-à-dire, comme on pourra le vérifier, le nombre $k_1 = 0{,}1992$.

Il considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0{,}1$ et : $\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n} = 0{,}1992\times(1-u_n)$ pour tout entier naturel n.

C'est-à-dire que la relation de récurrence qu'il envisage est : $u_{n+1} = 1{,}1992.u_n - 0{,}1992.u_n^{\,2}$.

2.1. Montrer que la restriction de la fonction : $x \mapsto f(x) = 1{,}1992\,x - 0{,}1992\,x^2$ à l'intervalle $[0\,;1]$ réalise une bijection de cet intervalle sur lui-même.

2.2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et qu'elle converge vers 1.

2.3. Quel serait le pronostic d'évolution à long terme selon ce modélisateur ?

3. Le deuxième d'entre eux envisage de mesurer le paramètre étudié une fois par semaine. Il choisit pour valeur de k l'arrondi au dix millième de $\dfrac{y(7)-y(0)}{\left(M-y(0)\right)y(0)}=\dfrac{y(7)-y(0)}{0{,}9.y(0)}$, c'est-à-dire, comme on pourra le vérifier, le nombre $k_2=2{,}0955$.

Il considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_0=0{,}1$ et : $\dfrac{v_{n+1}-v_n}{v_n}=2{,}0955\times(1-v_n)$ pour tout entier n.

C'est-à-dire que la relation de récurrence qu'il envisage est : $v_{n+1}=3{,}0955.v_n-2{,}0955.{v_n}^2$.

3.1. Etudier les variations de la fonction : $x\mapsto g(x)=3{,}0955x-2{,}0955x^2$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

3.2. Montrer que, si x appartient à l'intervalle $[1\,;1{,}15]$ alors $g(x)$ appartient à l'intervalle $[0{,}75;1]$ et que, si x appartient à l'intervalle $[0{,}75;1]$ alors $g(x)$ appartient à l'intervalle $[1\,;1{,}15]$.

3.3. En s'aidant d'une calculatrice, donner des valeurs approchées à 10^{-4} près des termes de rangs 1 , 2, 3 et 4 de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.4. Montrer que pour tout entier p au moins égal à 2 : $0{,}8<v_{2p}<1<v_{2p+1}<1{,}15$

3.5. Que pourrait dire ce deuxième modélisateur concernant l'évolution à long terme ?

4. Le troisième d'entre eux envisage de mesurer le paramètre étudié une fois chaque dix jours. Il choisit pour valeur de k l'arrondi au dix millième de $\dfrac{y(10)-y(0)}{\left(M-y(0)\right)y(0)}=\dfrac{y(10)-y(0)}{0{,}9.y(0)}$, c'est-à-dire, comme on pourra le vérifier, le nombre $k_3=3{,}4895$.

Il considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $w_0=0{,}1$ et : $\dfrac{w_{n+1}-w_n}{w_n}=3{,}4895\times(1-w_n)$ pour tout entier n.

C'est-à-dire que la relation de récurrence qu'il envisage est : $w_{n+1}=4{,}4895.w_n-3{,}4895.{w_n}^2$.

4.1. En s'aidant d'une calculatrice, donner des valeurs approchées à 10^{-4} près des termes de rangs 1 , 2, 3, 4, 5 et 6 de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4.2. Que penser de cette modélisation ?

5. Moralité ?

Eléments de correction.

Partie A

1.1. Les fonctions y et z étant inverses multiplicatives l'une de l'autre, pour tout réel t positif :

$y'(t) = -\dfrac{z'(t)}{\left(z(t)\right)^2}$ et la fonction z vérifie pour tout réel positif t la relation : $-\dfrac{z'(t)}{\left(z(t)\right)^2} = k \times \dfrac{1}{z(t)} \times \left(M - \dfrac{1}{z(t)}\right)$ soit : $z'(t) = -kM.\left(z(t)\right) + k\,z(t)$. Il s'agit bien d'une équation différentielle linéaire non homogène du premier ordre dont les coefficients sont : $a = -k\,M$; $b = k$. Le coefficient a est strictement négatif et le coefficient b strictement positif.

1.2. Une solution « fonction constante » de cette équation est la fonction : $t \mapsto \dfrac{1}{M}$, et il en découle que l'ensemble des fonctions solutions de cette équation est l'ensemble des fonctions de la forme : $z(t) = \dfrac{1}{M} + \lambda.\exp(-kM\,t)$.

Si on désigne par $y_0 = y(0)$ la valeur initiale de la fonction y, prise lorsque $t = 0$, celle de la fonction z est $z_0 = \dfrac{1}{y_0}$ la fonction solution qui lui correspond est la fonction définie par : $z(t) = \dfrac{1}{M} + \left(\dfrac{1}{y_0} - \dfrac{1}{M}\right).\exp(-kM\,t)$

Ainsi, la solution recherchée de l'équation différentielle initiale est la fonction définie par :

$$y(t) = \frac{1}{\dfrac{1}{M} + \left(\dfrac{1}{y_0} - \dfrac{1}{M}\right).\exp(-kM\,t)} = \frac{M\,y_0}{y_0 + (M - y_0)\exp(-kM\,t)}$$

2.1. Une fonction exponentielle d'exposant négatif est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, il s'ensuit que la fonction y est une fonction strictement croissante, de sa valeur initiale y_0 jusqu'à sa limite en plus l'infini qui est égale à M.

En tant que fonction strictement croissante et continue sur son intervalle de définition, cette fonction solution réalise une bijection de l'intervalle $[0\,;+\infty[$ sur l'intervalle $[y_0\,;M[$.

La fonction solution vérifiant l'équation différentielle : $y' = k\,y(M - y)$, cette relation nous fournit la valeur du nombre dérivé en zéro sans trop de calculs : $y'(0) = k\,y_0(M - y_0)$.

2.2. La fonction solution vérifie l'équation différentielle : $y' = k\,y(M - y)$. Si nous dérivons de part et d'autre, nous obtenons la relation : $y'' = k\,y'(M - y) - k\,y\,y' = k\,y'(M - 2\,y)$. Or, en ce qui concerne cette fonction solution, sa dérivée première est strictement positive.

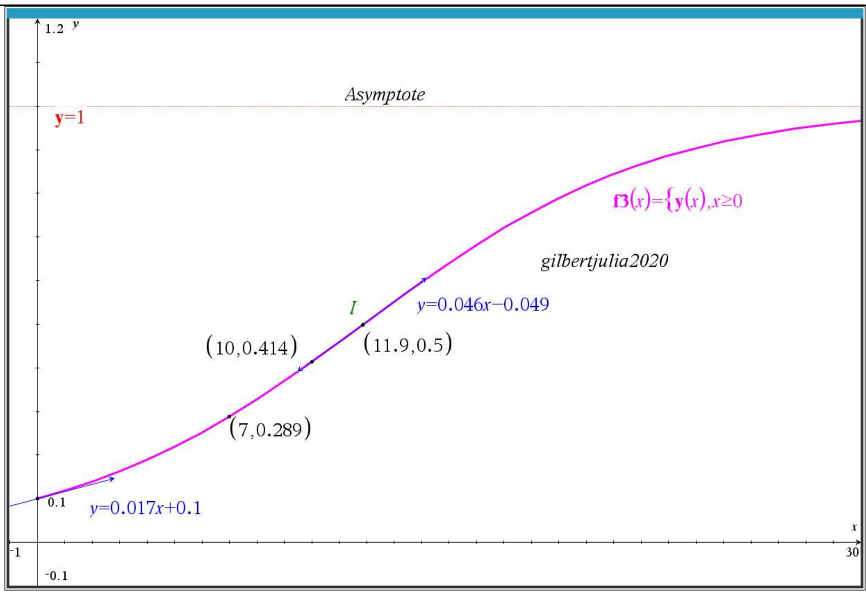
La dérivée seconde est du même signe que $M - 2\,y$. Elle s'annule et change de signe lorsque : $y = \dfrac{M}{2}$.

2.3. Voir l'application numérique pour l'allure de la courbe. La demi-tangente au point d'abscisse zéro a pour coefficient directeur le nombre dérivé en zéro, lequel est $y'(0) = k\, y_0 (M - y_0)$.

L'abscisse du point d'inflexion est la valeur de t telle que : $y(t) = \dfrac{M\, y_0}{y_0 + (M - y_0)\exp(-kM\, t)} = \dfrac{M}{2}$, c'est-à-dire telle que : $2\, y_0 = y_0 + (M - y_0)\exp(-k\, M\, t)$. On obtient : $t = -\dfrac{1}{k\, M} \ln\left(\dfrac{y_0}{M - y_0}\right)$.

3. Le modèle logistique se caractérise par une croissance qui est au début proche d'une croissance exponentielle puis s'infléchit pour finir par plafonner et se stabiliser.

4. Tracé de la courbe C avec quelques uns de ses éléments remarquables.



Partie B

Le paramètre observé est mesuré à intervalles de temps réguliers à partir d'un instant initial zéro. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ces mesures. Cette suite est telle que :

- Sa valeur initiale u_0 satisfait la double inégalité : $0 < u_0 \leq M$ (où M est un réel strictement positif)
- Le taux de variation entre deux mesures consécutives est proportionnel à l'écart avec la valeur M, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n : $\dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n} = k(M - u_n)$ où k est un réel strictement positif.

1. Les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfont la relation de récurrence : $u_{n+1} = (kM+1)u_n - k{u_n}^2$.

2. Premier modélisateur

2.1. Il s'agit d'étudier sur l'intervalle $[0\,;1]$ les variations de la fonction : $x \mapsto f(x) = 1{,}1992x - 0{,}1992x^2$. La dérivée de cette fonction est la fonction : $x \mapsto f'(x) = 1{,}1992 - 0{,}3984x$, fonction qui sur l'intervalle $[0\,;1]$ est strictement positive, prenant des valeurs supérieures ou égales à 0,8008. La fonction f est strictement croissante et continue sur cet intervalle, elle réalise une bijection de $[0\,;1]$ sur l'intervalle $[f(0)\,;f(1)]$. Or, $f(0)=0$; $f(1)=1$ sont des points fixes de f (et ce sont les seuls). Il s'agit de ce fait d'une bijection de $[0\,;1]$ sur lui-même.

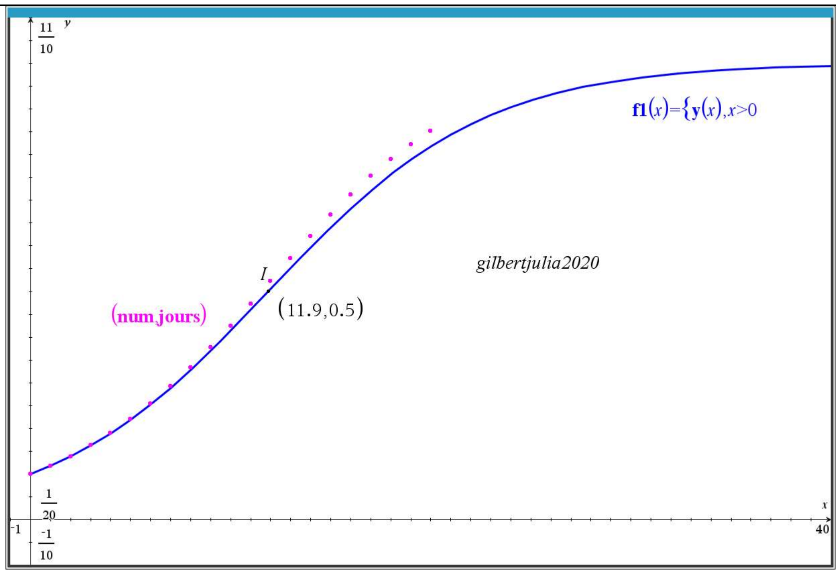
2.2. La fonction f est telle que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$ pour la modélisation en question.

L'intervalle $[0\,;1]$ étant stable par f, si un terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à cet intervalle, son suivant aussi, cette propriété est héréditaire. Comme c'est le cas du premier u_0, ce qui initialise cette propriété, c'est le cas de tous.

De plus, une calculatrice quelconque montre que $u_1 > 0{,}117 > u_0$. Les deux premiers termes de la suite étant dans cet ordre, et la fonction f conservant l'ordre en tant que fonction croissante, deux termes consécutifs quelconques de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont rangés dans le même ordre que les deux premiers : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante.

Etant strictement croissante et majorée par 1, cette suite est convergente vers une limite strictement supérieure à 0,1 (et même à 0,117). Elle ne peut converger que vers un point fixe de f et le réel 1 est le seul candidat potentiel. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

Il y a peu d'écart entre la modélisation continue et la modélisation discrète de ce premier modélisateur. On observe seulement une légère surestimation dans la modélisation discrète, qui n'influe pas sur le pronostic à long terme : croissance mais stabilisation à 1 à long terme.



3. Deuxième modélisateur

3.1. La dérivée de la fonction : $x \mapsto g(x) = 3{,}0955x - 2{,}0955x^2$ est la fonction $x \mapsto g'(x) = 3{,}0955 - 4{,}191x$ qui s'annule en $\dfrac{3{,}0955}{4{,}191}$, est positive avant et négative après. Une calculatrice indique que ce nombre est compris entre 0,73 et 0,74. La fonction g est strictement croissante sur $\left[0\ ;\ \dfrac{3{,}0955}{4{,}191}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{3{,}0955}{4{,}191}\ ;\ +\infty\right[$

3.2. Une calculatrice indique que : $1{,}14 < g(0{,}75) < 1{,}15$; $g(1) = 1$; $0{,}78 < g(1{,}15) < 0{,}79$.

L'intervalle $[0{,}75; 1]$ est inclus dans un intervalle où g est strictement décroissante, son image est incluse dans l'intervalle $\left[g(1)\ ;\ g(0{,}75)\right]$ lui-même inclus dans $[1\ ;\ 1{,}15]$.

$[0{,}78\ ;\ 1]$, a fortiori inclus dans $[0{,}78\ ;\ 1]$

L'intervalle $[1\ ;\ 1{,}15]$ est inclus dans un intervalle où g est strictement décroissante, son image est incluse dans l'intervalle $\left[g(1{,}15)\ ;\ g(1)\right]$ lui-même inclus dans $[0{,}78\ ;\ 1]$, a fortiori inclus dans $[0{,}75\ ;\ 1]$.

Si x appartient à l'intervalle $[1\ ;\ 1{,}15]$ alors $g(x)$ appartient à l'intervalle $[0{,}75; 1]$ et que, si x appartient à l'intervalle $[0{,}75; 1]$ alors $g(x)$ appartient à l'intervalle $[1\ ;\ 1{,}15]$.

3.3. Voir la copie d'écran. On note en particulier que $0{,}8 < v_4 < 0{,}81$; $1{,}13 < v_5 < 1{,}14$. De ce fait, la quadruple inégalité $0{,}8 < v_{2p} < 1 < v_{2p+1} < 1{,}15$ est initialisée au rang 2.

Supposons que pour un certain rang p : $0{,}8 < v_{2p} < 1 < v_{2p+1} < 1{,}15$.

Alors : $\begin{cases} 1 < v_{2p+1} < 1{,}15 \Rightarrow 0{,}8 < g\left(v_{2p+1}\right) = v_{2p+2} < 1 \\ 0{,}8 < v_{2p+2} < 1 \Rightarrow 1 < g\left(v_{2p+2}\right) = v_{2p+3} < 1{,}15 \end{cases}$, ce qui justifie l'hérédité de cette quadruple inégalité par rapport à l'indice p.

3.4. Ce deuxième modélisateur peut conclure à une pseudo-périodicité, une semaine au dessus de seuil 1, une semaine au dessous et ainsi de suite.

Ci-contre, une copie de tableur présentant les premiers termes des deux suites u et v. Attention que la suite « **num** » indexe des jours pour la suite u et des semaines pour la suite v.

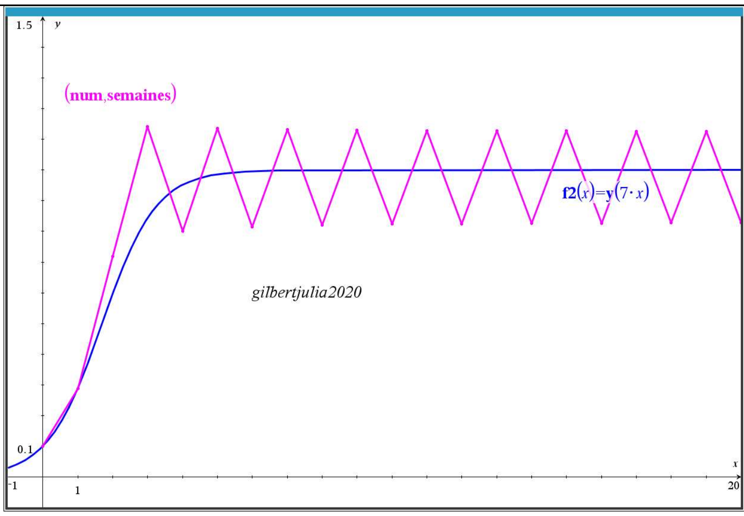
	A num	B continu	C jours	D semaines	E continusem
=	=seq(n,n,(	=y(num)	=seqgen(1.1992*u(n·	=seqgen(3.0955*u(n·	=y(7*num)
1	0	0.1	0.1	0.1	0.1
2	1	0.11793	0.11793	0.2886	0.28859
3	2	0.13857	0.13865	0.71882	0.59695
4	3	0.16216	0.16244	1.1424	0.84393
5	4	0.18889	0.18954	0.80158	0.95179
6	5	0.21888	0.22014	1.1349	0.98632
7	6	0.25214	0.25434	0.81414	0.99621
8	7	0.28859	0.29212	1.1312	0.99896
9	8	0.328	0.33331	0.82016	0.99972
10	9	0.37	0.37757	1.1292	0.99992
11	10	0.41406	0.42439	0.82341	0.99998
12	11	0.45953	0.47305	1.1281	0.99999
13	12	0.50569	0.5227	0.82527	1.
14	13	0.55176	0.5724	1.1274	1.
15	14	0.59695	0.62116	0.82636	1.
16	15	0.64056	0.66803	1.127	1.
17	16	0.68196	0.71221	0.827	1.
18	17	0.72067	0.75304	1.1268	1.
19	18	0.75635	0.79008	0.82739	1.
20	19	0.78881	0.82312	1.1267	1.
21	20	0.81799	0.85212	0.82763	1.

Quelques résultats calculatoires concernant les fonctions f et g.

Define $f(x)=1.1992\cdot x-0.1992\cdot x^2$	*Terminé*
solve$(f(x)=x,x)$	$x=0.$ or $x=1.$
$\frac{d}{dx}(f(x))$	$1.1992-0.3984\cdot x$
solve$(1.1992-0.3984\cdot x=0,x)$	$x=3.01004$
$\frac{1.1992}{0.3984}$	$\frac{1499}{498}$
$\frac{1.1992}{0.3984}$	3.01004
$1.1992-0.3984$	0.8008
Define $g(x)=3.0955\cdot x-2.0955\cdot x^2$	*Terminé*
$\frac{d}{dx}(g(x))$	$3.0955-4.191\cdot x$
solve$(3.0955-4.191\cdot x=0,x)$	$x=0.73861$
$g(1.15)$	0.78853
$g(0.75)$	1.1429

Le cas du « deuxième modélisateur ».

Une pseudo-périodicité en accordéon diatonique …



4. La colonnes « décades » affiche des valeurs approchées des premiers termes de la suite w, affichage qui montre l'aspect chaotique du comportement de cette suite. En particulier, nous observons des termes négatifs, ce qui est incompatible avec la nature du paramètre qui est censé être représenté. La modélisation ne correspond en aucun cas à la réalité.

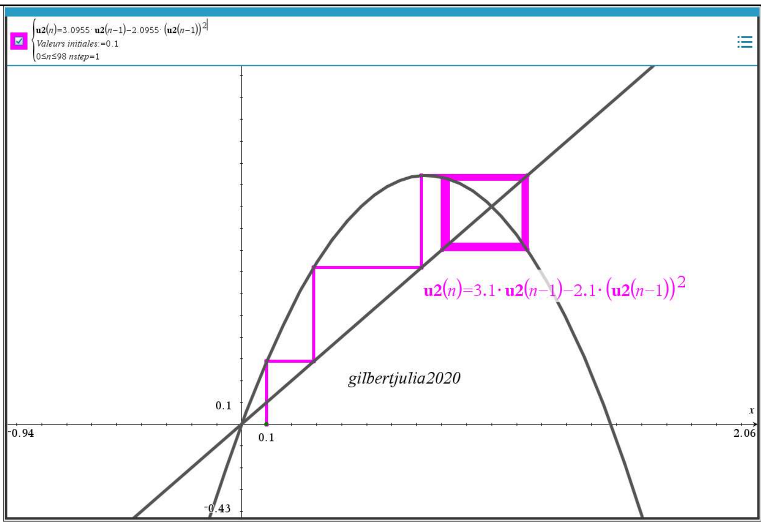
	A num	B continu	C jours	D semaines	E continusem	F decades	G
=	=seq(n,n,(	=y(num)	=seqgen(1.1992*u(n-	=seqgen(3.0955*u(n-	=y(7*num)	=seqgen(4.489	
1	0.	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	
2	1.	0.11793	0.11793	0.2886	0.28859	0.41406	gilbertjulia2020
3	2.	0.13857	0.13865	0.71882	0.59695	1.2607	
4	3.	0.16216	0.16244	1.1424	0.84393	0.11402	
5	4.	0.18889	0.18954	0.80158	0.95179	0.46653	
6	5.	0.21888	0.22014	1.1349	0.98632	1.335	
7	6.	0.25214	0.25434	0.81414	0.99621	-0.22557	
8	7.	0.28859	0.29212	1.1312	0.99896	-1.1902	
9	8.	0.328	0.33331	0.82016	0.99972	-10.287	
10	9.	0.37	0.37757	1.1292	0.99992	-415.46	
11	10.	0.41406	0.42439	0.82341	0.99998	-6.0419E5	
12	11.	0.45953	0.47305	1.1281	0.99999	-1.2738E12	
13	12.	0.50569	0.5227	0.82527	1.	-5.6621E24	
14	13.	0.55176	0.5724	1.1274	1.		
15	14.	0.59695	0.62116	0.82636	1.		
16	15.	0.64056	0.66803	1.127	1.		
17	16.	0.68196	0.71221	0.827	1.		
18	17.	0.72067	0.75304	1.1268	1.		
19	18.	0.75635	0.79008	0.82739	1.		
20	19.	0.78881	0.82312	1.1267	1.		
21	20.	0.81799	0.85212	0.82763	1.		

F decades

Une représentation de la suite du « deuxième modélisateur » en mode toile.

Après les trois premières constructions, il apparaît un « escargot ».

Bien malin cependant qui peut émettre une quelconque conjecture à propos d'une convergence éventuelle, il faudrait creuser la question.



5. On peut conclure qu'une modélisation discrète a un sens à condition que deux mesures successives soient suffisamment rapprochées pour que le modèle proposé ne soit pas trop déformé par l'approximation qui en découle. Bien entendu, « suffisamment » a une valeur subjective. Comme dans tout acte de modélisation, le modèle que l'on obtient doit être impérativement confronté à la dure réalité …