Matrices stochastiques et application à une situation probabiliste. Etude de la même situation à l'aide de suites arithmético-géométriques.

n est un entier ≥ 2. On considère l'ensemble M_n des matrices carrées à coefficients complexes $n\times n$.

On dit qu'une matrice $A = (a_{ij})$ de cet ensemble est une *matrice stochastique* si elle vérifie les conditions suivantes :

- Tous ses termes sont des **réels positifs ou nuls**.
- Pour tout entier i de $\{1, ...,n\}$: $a_{i1} + a_{i2} + ...+ a_{in} = 1$, c'est à dire que la **somme des termes de chacune de ses lignes est égale à 1**.

On désigne par S_n l'ensemble des matrices stochastiques $n\times n$.

Partie 1. Généralités.

1. Donner un exemple d'une matrice stochastique de S_n.

2. On désigne par V_1 la matrice-colonne d'ordre n dont tous les termes sont égaux à 1.
Montrer que une matrice M de M_n dont tous les termes sont positifs ou nuls est stochastique si et seulement si $M\times V_1 = V_1$

3.1. Soient A et B deux matrices de S_n. Etablir que $A\times B$ appartient à S_n
3.2. Soit A une matrice de S_n. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, A^k appartient à S_n.

4. Soit A une matrice de S_n et f l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ dont la matrice dans la base canonique est A dans le sens que pour tout vecteur ligne $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \end{pmatrix}$, l'image $f(x)$ est donnée par :
$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \end{pmatrix}\times A$
Pour tout vecteur ligne de $\mathbf{C}^n$ on convient de noter : $|x| = Max(|x_1|,|x_2|,...,|x_n|)$. On pourra remarquer que ainsi pour tout couple (x,x') de vecteurs de $\mathbf{C}^n$: $|x+x'| \leq |x| + |x'|$
4.1. Justifier que 1 est valeur propre de f et citer un vecteur propre associé.
4.2. Etablir que pour tout vecteur x de $\mathbf{C}^n$: $|f(x)| \leq |x|$. En déduire que les modules des valeurs propres de f sont tous ≤ 1.

5. On se propose de montrer que : $\mathbf{C}^n = \text{Im}(f\text{-Id}) \oplus \text{Ker}(f\text{-Id})$.
5.1. Soit y un élément de l'ensemble $\text{Im}(f\text{-Id}) \cap \text{Ker}(f\text{-Id})$. Il existe x de $\mathbf{C}^n$ tel que $y = f(x) - x$. Pour tout entier $k \geq 1$, exprimer $f^k(x)$ en fonction de x, y et k. Etablir qu'alors $k|y| \leq 2|x|$ et en déduire que y est nécessairement nul.
5.2. Conclure.

6. Etablir que tout sous-espace propre associé à une valeur propre de f autre que 1 est inclus dans $\text{Im}(f\text{-Id})$

7. On suppose que l'endomorphisme f est diagonalisable, et l'on classe ses valeurs propres par modules décroissants : $1 = |\lambda_1| = |\lambda_2| = ... = |\lambda_r| > |\lambda_{r+1}| \geq ... \geq |\lambda_n|$ (une même valeur propre pouvant être répétée plusieurs fois, autant que son ordre l'exige). On complète une base $(v_1, v_2, ...,v_p)$ de $\text{Ker}(f\text{-Id})$ en une base $B' = (v_1, v_2, ...,v_p, v_{p+1}, ...,v_n)$ de vecteurs propres de $\mathbf{C}^n$, chaque v_i étant associé à λ_i Soit D la matrice de f dans cette base B'
7.1. Prouver que la suite (M^k) converge si et seulement si la suite (D^k) $(k \in \mathbf{C})$ converge
7.2. Prouver que la suite (M^k) converge si et seulement si 1 est la seule valeur propre de f dont le module est égal à 1.

7.3. Dans ces conditions montrer que (M^k) converge vers la matrice de la projection sur Ker (f-Id) suivant la direction de Im (f-Id)

Partie 2. Application à une situation probabiliste.

Généralement, un **processus stochastique** est une suite d'expériences dont le résultat dépend du hasard. Ici, nous admettrons qu'en certains instants 0, 1, 2, ..., t,… nous observons un système. Celui-ci peut se trouver dans l'un des états d'une collection finie d'états possibles. L'observation du système est ainsi considérée comme une expérience dont le résultat (aléatoire) est l'état dans lequel se trouve le système au moment de l'observation.
Nous supposons que nous connaissons pour chaque paire d'états i et j, et pour chaque instant t, la probabilité $p_{i\,j}(t)$ que le processus soit dans l'état j à l'instant $t+1$ étant donné qu'il se trouve dans l'état i à l'instant t. De plus, la probabilité $p_{i\,j}(t)$ sera supposée **ne pas dépendre de *t*** (de ce fait, elle pourra être notée simplement $p_{i\,j}$).

Un tel processus est appelé **chaîne de Markov** (à temps discret et avec un ensemble fini d'états), du nom de son inventeur *Andrei Andreyevich Markov* (1856-1922).
Avec ces hypothèses, nous pouvons décrire le système en donnant l'ensemble $\{u_1, ..., u_m\}$ des états u_i possibles et une matrice P de dimensions $m\times m$ dont le terme $p_{i\,j}$ est la probabilité que le processus soit dans l'état j à l'instant $t+1$ étant donné qu'il se trouve dans l'état i à l'instant t. P est appelée **matrice de transition** du système.
On représente généralement P par un graphe orienté G dont les sommets correspondent aux m états et les arcs aux couples ordonnés d'états $(i\ ;\ j)$ tels que $p_{i\,j}>0$
Remarquez que **la somme de chaque ligne vaut 1**, c'est à dire que la matrice de transition est une matrice stochastique.

On se propose d'étudier, à titre d'exemple, la situation suivante :
Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attraper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un, et un seul, des trois états suivants: immunisé (I), malade (M), non malade et non immunisé (S). D'un mois à l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes:

- étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité 0.9 ou passer à l'état S avec une probabilité 0.1 ;
- étant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité 0.5 ou passer à l'état M avec une probabilité 0.5 ;
- étant malade, il peut le rester avec une probabilité 0.2 ou passer à l'état I avec une probabilité 0.8.

1. Tracez un graphe probabiliste pour décrire cette situation et écrivez la matrice de transition.

2. Calculez l'état de probabilité de l'individu au bout de trois mois pour chacune des situations suivantes :
   - au départ, il est immunisé ;
   - au départ, il est non malade et non immunisé ;
   - au départ, il est malade.

3. Pouvez-vous donner des éléments sur la proportion à long terme d'individus malades dans la population étudiée ?

Partie 3. Résolution de la situation probabiliste à l'aide de suites.

On reprend dans cette partie les hypothèses de la partie précédente.
On considère un individu pris au hasard dans cette population, et on noté I_n, M_n, S_n les évènements « cet individu est reconnu, respectivement : immunisé, malade, non malade et non immunisé, lors du mois numéro n ». Pour tout entier n de **N**, on note respectivement i_n ; m_n et s_n les probabilités des évènements I_n, M_n, S_n.

1.1. Ecrire une relation indépendante de n entre i_n, m_n, s_n résultant de la définition des trois évènements.
1.2. Exprimer i_{n+1} et m_{n+1} en fonction de i_n et de m_n uniquement.
1.3. Montrer que les termes de la suite (i_n) vérifient la relation de récurrence :
Pour tout entier n de **N*** : $\boxed{i_{n+1} = 0{,}6\,i_n - 0{,}13\,i_{n-1} + 0{,}4}$ **(R₁)**.

2. Dans cette question, on considère l'ensemble S_0 des suites (u_n) qui vérifient pour tout entier n de **N*** la relation de récurrence : $u_{n+1} = 0{,}6\,u_n - 0{,}13\,u_{n-1}$ **(R_0)**.

2.1. On considère les suites des puissances d'un nombre complexe q donné, donc de terme général $u_n = q^n$.
Montrer qu'il existe deux valeurs q_1 et q_2 distinctes du complexe q telles que la suite de terme général $u_n = q^n$ appartienne à (S_0). (On notera q_1 celui des complexes dont la partie imaginaire est strictement positive).

2.2. Soit (u_n) une suite quelconque de (S_0), et soient u_0 et u_1 ses deux premiers termes. Résoudre le système d'inconnues x et y : $\begin{cases} x + y = u_0 \\ x\,q_1 + y\,q_2 = u_1 \end{cases}$ (on pourra garder les notations q_1 et q_2 dans les expressions trouvées). Les nombres complexes x et y prenant ces valeurs, démontrer qu'alors pour tout entier n de **N** :
$u_n = x(q_1)^n + y(q_2)^n$

2.3. Démontrer que toutes les suites de (S_0) convergent vers zéro.

3. On s'intéresse maintenant aux suites (i_n) qui vérifient la relation **(R_1)**.
3.1. Montrer qu'il existe une et une seule suite constante qui vérifie **(R_1)**. Soit k la constante trouvée.
3.2. Justifier que la suite suites (i_n) vérifie la relation **(R_1)** si et seulement si la suite (u_n) de terme général $u_n = i_n - k$ appartient à (S_0). Justifier que toutes les suites qui vérifient **(R_1)** convergent vers une même limite.

4. A l'aide des résultats de cette partie, retrouver les résultats de la question 3 de cette même partie 2.