Matrices stochastiques : éléments de correction.

L'application dite « concrète » n'a évidemment rien de concret. Aussi arbitraire que surréaliste, elle a été construite de toutes pièces pour pouvoir appliquer le modèle rudimentaire étudié. Vous pouvez continuer à braver le moustique si bon vous semble.

Partie 1. Généralités.

1. La matrice unité par exemple.

2. La relation $MV_1 = V_1$ signifie exactement que la somme des termes de chaque ligne de M vaut 1. Donc, si une matrice a des termes positifs ou nuls et si elle laisse stable V_1, elle vérifie les deux conditions imposées.

3.1. $A \times B$ a des termes positifs ou nuls, puisque chacun de ses termes est une somme de produits de deux termes positifs ou nuls. D'autre part, V_1 étant stable par B et aussi par A, il l'est par le produit $A \times B$. On obtient la caractérisation d'une matrice stochastique de 3.1.

3.2. Par récurrence évidente, A^k appartient à S_n puisque cet ensemble est stable pour le produit de matrices.

4.1. Une telle matrice laisse V_1 invariant : c'est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

4.2. Considérons pour chaque i la ligne i d'une matrice de S_n : la somme des termes de cette ligne est une somme de termes positifs ou nuls qui vaut 1. Chacun des termes est donc ≤ 1. On peut raisonner ainsi sur chaque terme. Il en résulte que le terme le plus grand de la matrice A est lui-même ≤ 1.

Pour tout x : $\left|f(x)\right| = Sup_i\left(\sum_j a_{ij}x_j\right) \leq \left(Sup_{i,j}a_{ij}\right)|x| \leq |x|$

Si λ est une valeur propre, et x un vecteur propre (donc non nul) associé, on obtient : $|\lambda x| = |\lambda|.|x| \leq |x|$ et comme x est non nul, on en déduit que λ est de module ≤ 1.

5.1. Si y un élément de l'ensemble Im(f-Id) $\cap$Ker (f-Id) il existe x de $\mathbf{C}^n$ tel que $y = f(x) - x$ mais puisque y appartient aussi par hypothèse à Ker (f-Id), on a aussi : $f(y) = y$.

Au rang 1 : $f(x) = x + y$

Au rang 2, on obtient : $f(y) = y = f^2(x) - f(x)$ ce qui donne : $f^2(x) = y + f(x) = 2y + x$.

On peut conjecturer que, pour tout entier $k \geq 1$: $f^k(x) = ky + x$.

Si on suppose cette relation vraie au rang k, on obtient en composant par f :

$f^{k+1}(x) = f(ky + x) = k.f(y) = + f(x) = k.y + (x + y) = (k+1)y + x$. La propriété conjecturée est bien héréditaire. Elle est exacte pour tout $k \geq 1$.

De cette relation, on déduit que : $\left|f^k(x)\right| + |x| \geq \left|f^k(x) - x\right| = k|y|$. Comme le module de $f(x)$ est inférieur ou égal à celui de x, il en est de même de toute puissance k de f. On obtient alors : $2.|x| \geq \left|f^k(x)\right| + |x| \geq \left|f^k(x) - x\right| = k|y|$

y est nécessairement nul : s'il ne l'était pas, son module serait strictement positif, et on pourrait trouver un entier k pour lequel cette inégalité ne serait pas vérifiée (on pourrait choisir : $k = \text{iPart}\left(2|x|/y + 1\right)$

On en déduit que les deux sous-espaces Im(f-Id) et Ker (f-Id) ont une intersection réduite au zéro. Mais d'après l'équation aux dimensions, la somme de leurs dimensions est égale à la dimension de $\mathbf{C}^n$ donc n : ils sont supplémentaires.

6. Si λ une valeur propre de f autre que 1, et x est un vecteur propre associé :

$f(x) - x = \lambda x - x = (\lambda-1).x$. Donc, $(\lambda-1).x$ appartient par construction à Im (f-Id), et puisque le coefficient λ-1 est non nul, il en est de même de x.

Donc, si λ est une valeur propre autre que 1, tous ses vecteurs propres sont dans Im(f-Id)

7. On suppose que l'endomorphisme f est diagonalisable, et l'on classe ses valeurs propres par modules décroissants : $1=|\lambda_1|=|\lambda_2|=...=|\lambda_r|>|\lambda_{r+1}|\geq ...\geq|\lambda_n|$ (une même valeur propre pouvant être répétée plusieurs fois, autant que son ordre l'exige). On complète une base (v_1, v_2, ...,v_p) de Ker(f-Id) en une base B' = (v_1, v_2, ...,v_p, v_{p+1}, ...,v_n) de vecteurs propres de $\mathbf{C}^n$, chaque v_i étant associé à λ_i Soit D la matrice de f dans cette base B'

7.1. Si P est la matrice de passage d'une base à l'autre : $M^k = P\times D^k\times P^{-1}$. La convergence d'une suite de matrice équivaut à la convergence de l'autre.

7.2. et 7.3. Les suites de termes λ_k convergent si et seulement si, ou bien $\lambda_k = 1$ auquel cas la suite des puissances est stationnaire), ou bien leur module est *strictement inférieur* à 1 (auquel cas, il y a convergence vers 0). Donc, D_k converge si et seulement si il n'y a pas d'autre valeur propre de module 1 que 1 lui-même. Et elle converge vers la matrice formée de 1 et de 0 définie ainsi. Il s'agit de la projection sur Im (f - Id) de direction Ker (f- Id)

Prouver que la suite (M^k) converge si et seulement si 1 est la seule valeur propre de f dont le module est égal à 1.

Correction de la Partie 2 du problème « matrices stochastiques »

La matrice de transition est : $\begin{pmatrix} 9/10 & 1/10 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 4/5 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$

Dans cet exemple, on obtient comme valeurs propres : 1, (- 3 + 2i)/10 et (- 3 - 2i)/10.

Les valeurs propres sont distinctes, f est diagonalisable, et 1 est la seule valeur propre de module 1. Il y a convergence, d'après les résultats de la première partie.

La matrice de f - Id est : $\begin{pmatrix} -1/10 & 1/10 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 4/5 & 0 & -4/5 \end{pmatrix}$.

Son noyau est la droite vectorielle Δ de base (1, 1, 1) et son image est le plan Π de base (-1, 0, 8) et (1, -5, 0) par exemple (cette image est engendrée par les images par f - Id des deux premiers vecteurs de base, qui sont visiblement indépendantes).

La matrice K de la projection sur Δ suivant la direction de Π s'obtient de plusieurs façons, c'est :

$$K = \begin{pmatrix} 40/53 & 40/53 & 40/53 \\ 8/53 & 8/53 & 8/53 \\ 5/53 & 5/53 & 5/53 \end{pmatrix}$$

Pour l'obtenir, on peut chercher quelle est la matrice qui vérifie : $K\times\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \\ 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ceci donne à long terme une proportion constante de 9,4 % de malades, quelles que soient les conditions initiales. En effet, quelle que soit la répartition de la population (x, y, z) au départ (donc de somme 1) on a :

$$\begin{pmatrix} 40/53 & 40/53 & 40/53 \\ 8/53 & 8/53 & 8/53 \\ 5/53 & 5/53 & 5/53 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 40/53 \\ 8/53 \\ 5/53 \end{pmatrix}$$

Partie 3.

On peut noter respectivement I_n, M_n et S_n les évènements « l'individu se trouve lors du mois numéro n dans l'état I, M, S »

1.1. D'après les hypothèses : $i_n + m_n + s_n = 1$ pour toute valeur de *n* (car les trois évènements I_n, M_n et S_n forment un système complet d'évènements).

1.2. D'autre part, par application de la formule des probabilités totales : $\begin{cases} i_{n+1} = 0{,}9\, i_n + 0{,}8\, m_n \\ m_{n+1} = 0{,}2\, m_n + 0{,}5\, s_n = 0{,}2\, m_n + 0{,}5(1 - i_n - m_n) \end{cases}$ soit : $\begin{cases} i_{n+1} = 0{,}9\, i_n + 0{,}8\, m_n \\ m_{n+1} = -0{,}5 i_n - 0{,}3\, m_n + 0{,}5 \end{cases}$

1.3. On peut obtenir une relation entre m_n ; i_n et i_{n-1} : $0{,}8\, m_n = -0{,}4\, i_{n-1} - 0{,}3(0{,}8 m_{n-1}) + 0{,}4$ en écrivant d'abord à l'ordre précédent la relation obtenue juste au dessus et en multipliant par 0,8. Ensuite : $0{,}8\, m_n = -0{,}4\, i_{n-1} - 0{,}3(i_n - 0{,}9\, i_{n-1}) + 0{,}4 = -0{,}3 i_n - 0{,}13\, i_{n-1} + 0{,}4$

En remplaçant dans la première des deux relations : $i_{n+1} = 0{,}9\, i_n + 0{,}8\, m_n = 0{,}9\, i_n + (-0{,}3 i_n - 0{,}13\, i_{n-1} + 0{,}4)$

On obtient : $i_{n+1} = 0{,}6\, i_n - 0{,}13\, i_{n-1} + 0{,}4$ (**R$_{0,4}$**).

2.1. Dans l'ensemble des suites qui vérifient la relation (**R$_0$**) : $u_{n+1} - 0{,}6\, u_n + 0{,}13 u_{n-1} = 0$, il se trouve deux suites puissances d'un nombre (q^n) si et seulement si *q* est solution de l'équation caractéristique : $q^2 - 0{,}6\, q + 0{,}13 = 0$ c'est-à-dire lorsque $q = 0{,}3 \pm 0{,}2i$. Ainsi : $q_1 = 0{,}3 + 0{,}2i$ et $q_2 = 0{,}3 - 0{,}2i$.

Le système $\begin{cases} x + y = u_0 \\ x\, q_1 + y\, q_2 = u_1 \end{cases}$ a pour solutions : $x = \dfrac{u_1 + q_2\, u_0}{q_1 - q_2}$ et : $y = \dfrac{q_1\, u_0 - u_1}{q_1 - q_2}$

2.2. Supposons que *x* et *y* prennent les valeurs calculées ci-dessus. Considérons la relation : $u_n = x(q_1)^n + y(q_2)^n$. Cette relation est alors initialisée aux rangs 0 et 1.

Supposons-la vérifiée aux rangs *n*-1 et *n*. Alors :

$0{,}6 u_n = 0{,}6\, x(q_1)^n + 0{,}6\, y(q_2)^n$ et : $0{,}13 u_{n-1} = 0{,}13\, x(q_1)^{n-1} + 0{,}13\, y(q_2)^n$. On en déduit que : $u_{n+1} = 0{,}6 u_n - 0{,}13 u_{n-1} = x \times (q_1)^{n-1} \times (0{,}6\, q_1 - 0{,}13) + y \times (q_1)^{n-1} \times (0{,}6\, q_2 - 0{,}13)$

Mais vu que q_1 et q_2 sont solution de l'équation caractéristique : $06\, q_1 - 0{,}13 = {q_1}^2$ et $06\, q_2 - 0{,}13 = {q_2}^2$.

Donc : $u_{n+1} = x \times (q_1)^{n-1} \times (q_1)^2 + y \times (q_1)^{n-1} \times ({q_2}^2) = x \times (q_1)^{n+1} + y \times (q_1)^{n+1}$. La relation à démontrer est encore vérifiée au rang suivant *n*+1. Elle est donc vérifiée pour tout entier naturel *n*.

2.3. Puisque q_1 et q_2 sont de modules strictement plus petit que 1 (c'est $\sqrt{0{,}13}$), chacune des suites $(q_i)^n$ pour i =1, 2 converge vers zéro. Donc, toute combinaison linéaire de ces deux suites fait de même.

3.1. La seule suite constante qui vérifie la relation **(R$_0$)** est celle dont le terme général *x* vérifie : $x = 0{,}6\, x - 0{,}13\, x + 0{,}4$ et l'on trouve : $x = \dfrac{40}{53}$

3.2. Immédiat. Il en résulte que toutes vont converger vers $x = \dfrac{40}{53}$

3.3. On obtient : $i_n = \dfrac{\left(i_1 - \dfrac{40}{53}\right) + q_2\left(i_0 - \dfrac{40}{53}\right)}{q_1 - q_2}(q_1)^n + \dfrac{-\left(i_1 - \dfrac{40}{53}\right) + q_1\left(i_0 - \dfrac{40}{53}\right)}{q_1 - q_2}(q_2)^n + \dfrac{40}{53}$

4. Les deux autres suites vont avoir des limites *m* et *s* telles que : $0{,}8m = \dfrac{40}{53} - 0{,}9\dfrac{40}{53} = \dfrac{4}{53}$ d'où $m = \dfrac{5}{53}$ et ensuite si on voulait : $s = \dfrac{8}{53}$

A long terme, la proportion d'individus malades est environ 9 ,4 %.