Loi étoile sur]-1, +1[

Plusieurs sujets de baccalauréat des années 1970 à 1985 portent sur ce thème : étude d'une loi de composition interne sur l'intervalle $\left]-1,\ 1\right[$. *Je propose ici une synthèse de quelques uns de ces sujets, en particulier celui de Besançon septembre 1974 et celui du Groupe1 C 1983.*

1. Le sujet

Dans tout le sujet, on note I l'intervalle ouvert : $I=\left]-1,\ 1\right[$.

A. Une étude de fonctions

À tout réel a de l'intervalle $I=\left]-1,\ 1\right[$ on associe la fonction f_a définie sur $I=\left]-1,\ 1\right[$ par : $f_a(x)=\dfrac{x+a}{1+a\,x}$.

1. Etudier le sens des variations de f_a.

2. Déterminer les limites de f_a aux bornes de son domaine de définition.

3. En déduire que, quel que soit a de l'intervalle $I=\left]-1,\ 1\right[$, f_a est une bijection de I sur lui-même.

B. Une loi interne sur I

À tout couple $(s,\ t)$ de réels appartenant à l'intervalle ouvert $I=\left]-1,\ 1\right[$, on associe le nombre réel : $s*t=\dfrac{s+t}{1+s\,t}$.

1. Justifier que l'on définit ainsi une loi de composition interne sur $I=\left]-1,\ 1\right[$.

2. Montrer que cette loi étoile munit $I=\left]-1,\ 1\right[$ d'une structure de groupe commutatif.

3. « Racine-étoile »

Soit s un réel appartenant à l'intervalle ouvert $I=\left]-1,\ 1\right[$. Démontrer qu'il existe un et un seul réel x appartenant à I tel que : $x*x=s$ (ce réel est parfois appelé la « racine-étoile » de s).

C. La famille des fonctions f_a et leurs courbes représentatives

On désigne par F l'ensemble des fonctions f_a lorsque a décrit l'intervalle ouvert $I = \left]-1,\ 1\right[$. Pour chaque réel a de $I = \left]-1,\ 1\right[$, on note C_a la courbe représentative de f_a dans un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

1. Montrer que $(F, \circ)$ est un groupe isomorphe au groupe $(I, *)$

2. Démontrer (dans l'ordre que l'on voudra) que C_a est globalement invariante par une réflexion que l'on précisera et que C_a et C_{-a} sont images l'une de l'autre par deux transformations que l'on précisera.

3. Représenter dans le repère $\left(O;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$ C_a pour les valeurs suivantes de a : $-\dfrac{2}{3}$; $-\dfrac{1}{2}$; 0 ; $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{2}{3}$

C. Un groupe de matrices et un autre d'endomorphismes du plan vectoriel

À tout réel t de l'intervalle $I = \left]-1,\ 1\right[$ on associe la matrice $M_t = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}$.

On donne aussi un plan vectoriel P, une base $\left(\vec{i},\ \vec{j}\right)$ de P et φ_t l'endomorphisme de P dont la matrice dans la base $\left(\vec{i},\ \vec{j}\right)$ est la matrice M_t.

On désigne par E l'ensemble de toutes les matrices M_t et par Φ l'ensemble de tous les endomorphismes φ_t de P lorsque t décrit $I = \left]-1,\ 1\right[$.

1. Montrer que φ_t est un automorphisme de P.

2. Déterminer l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ tels que $\vec{u}$ et $\varphi_t\left(\vec{u}\right)$ soient liés.

3. Démontrer (dans l'ordre que l'on voudra) que quel que soit le couple $(t, t') \in I \times I$, $M_{t'} \times M_t = M_{t'*t}$ et $\varphi_{t'} \circ \varphi_t = \varphi_{t'*t}$.

En déduire que les ensembles $(\Phi, \circ)$; $(E, \times)$ sont munis d'une structure de groupe commutatif et qu'ils sont isomorphes à $(I, *)$

D. Une équation fonctionnelle

Dans cette partie, on se propose de déterminer l'ensemble des fonctions *f* définies sur $I =]-1,\ 1[$, continues sur *I* et dérivables en zéro, telles que $\forall x \in I,\ \forall y \in I \quad f(x)\times f(y) = f(x * y)$ **(propriété P)**

1. Un exemple

Soit *g* la fonction définie sur *I* par : $g(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

1.1. Montrer que *g* vérifie la **propriété P**. Montrer qu'il en est de même de la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{g(x)} = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

1.2. Représenter *g* et $\dfrac{1}{g}$ dans un même repère.

2. Rechercher s'il existe des fonctions constantes sur *I* qui vérifient la **propriété P**.

Dans toute la suite, on suppose que f n'est pas la fonction nulle sur I.

3.1. Montrer que $f(0)=1$

3.2. Montrer que *f* ne peut s'annuler sur *I* et que quel que soit *x* appartenant à *I* : $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$

3.3. Montrer que *f* est strictement positive sur *I*.

4.1. *x* et *y* appartenant à *I*, montrer qu'il existe un réel *h* tel que $f(x)\times f(y)=f(x+h)$

4.2. Réciproquement, *x* et $x+h$ étant donnés dans *I*, montrer qu'il existe *y* appartenant à *I* tel que $f(x)\times f(y)=f(x+h)$. Déterminer *y*.

4.3. On suppose *h* non nul. Déterminer le rapport $\rho=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ en fonction de *x* et du *y* déterminé dans **4.2**.

4.4. Montrer que *f* est dérivable en tout point de *I*. On rappelle que *f* est supposée dérivable en zéro (on posera $f'(0)=C$)

5. En conclure que les fonctions *f* vérifiant la **propriété P** et ayant pour nombre dérivé en zéro le réel *C* sont telles que pour tout *x* appartenant à *I* : $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{C}{1-x^2}$. En déduire toutes les fonctions définies sur *I* et vérifiant la **propriété P**.

2. Eléments de correction

A. Une étude de fonctions

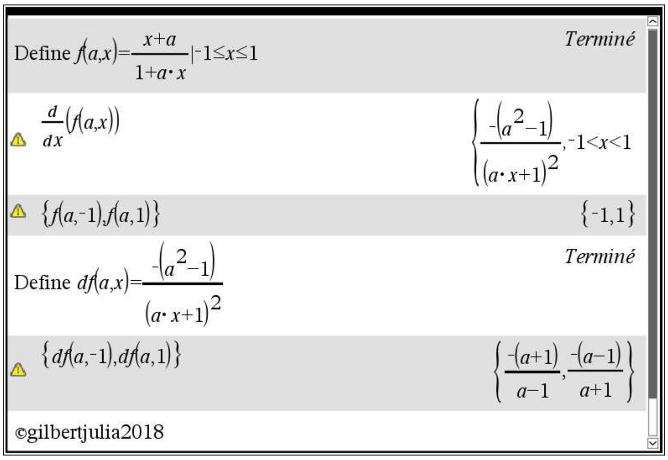
1. Soit a un réel de l'intervalle $I =]-1,\ 1[$. La fonction f_a est dérivable sur I (car fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle) et sa dérivée est la fonction : $x \xrightarrow{f_a'} f_a'(x) = \dfrac{1-a^2}{(1+a\,x)^2}$, strictement positive sur I : f_a est une fonction strictement croissante sur I.

2. Sans qu'il y ait la moindre indétermination : $\lim\limits_{x\to 1} f_a(x) = \dfrac{1+a}{1+a} = 1$ et $\lim\limits_{x\to -1} f_a(x) = \dfrac{-1+a}{1-a} = -1$.

(f_a est la restriction à I d'une fonction rationnelle dérivable sur $\overline{I} = [-1,\ 1]$, de même expression qu'elle, qui prend respectivement les valeurs -1 et 1 en -1 et en 1. Les limites de f_a sont égales aux valeurs prises en ces points par ce prolongement).

Puisque f_a est continue et strictement croissante sur I, f_a prend une fois et une seule toute valeur de l'intervalle $\left]\lim\limits_{x\to -1} f_a(x),\ \lim\limits_{x\to 1} f_a(x)\right[=]-1,\ 1[$.

f_a réalise une bijection de cet intervalle sur lui-même.



B. Une loi interne sur I

À tout couple $(s,\ t)$ de l'intervalle ouvert $I =]-1,\ 1[$, on associe le nombre réel : $s*t = \dfrac{s+t}{1+s\,t}$.

On note que quel que soit le couple $(s,\ t)$ de réels appartenant à l'intervalle ouvert $I =]-1,\ 1[$: $\dfrac{s+t}{1+s\,t} = f_s(t) = f_t(s)$.

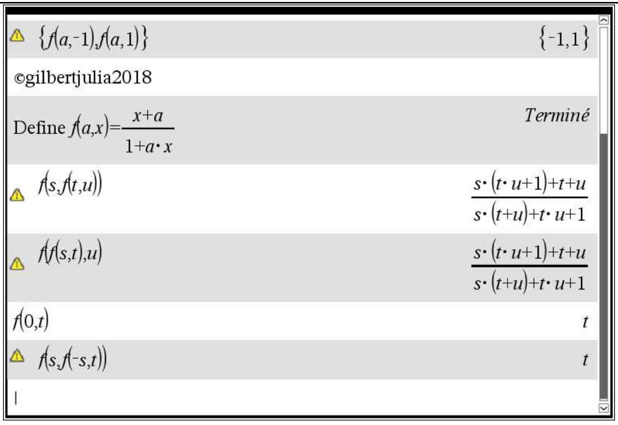
1. Quel que soit $s \in I$, l'application f_s réalise une bijection de I sur lui-même ; ainsi quel que soit $t \in I$, $f_s(t) \in I$. Quel que soit le couple $(s,\ t)$ de $I \times I$, $s*t = f_s(t) \in I$. La loi étoile est une loi interne sur I.

2. La commutativité de cette loi résulte de façon évidente des commutativités de l'addition et de la multiplication dans **R**.

$s*(t*u)=f_s(f_t(u))$ tandis que $(s*t)*u=f_{f_s(t)}(u)$. La copie d'écran ci-contre montre qu'il y a égalité : $f_{f_s(t)}(u)=f_s(f_t(u))=\dfrac{stu+s+t+u}{st+su+tu+1}$ dans les deux cas, ce qui prouve l'associativité de la loi étoile.

Quel que soit t appartenant à I, $0*t=f_0(t)=t$: zéro est élément neutre pour la loi étoile.

Enfin, quel que soit s appartenant à I : $(-s)*s=0$, Tout élément de I a un inverse, son opposé est aussi son inverse pour la loi étoile.



En résumé, la loi étoile munit $I=]-1,\ 1[$ d'une structure de groupe commutatif.

3. $x*x=\dfrac{2x}{1+x^2}$; $x*x=s \Leftrightarrow s\,x^2-2x+s=0$

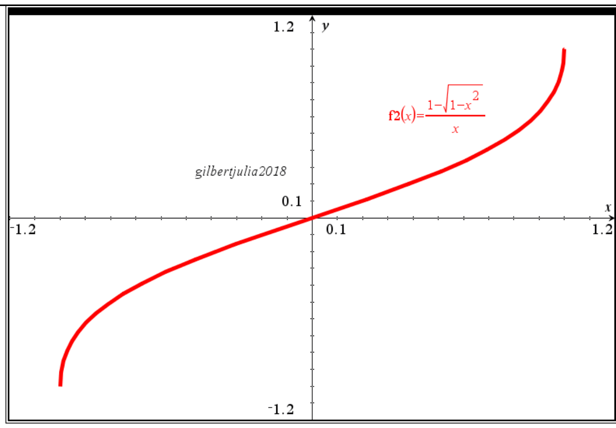
Si $s=0$, l'équation obtenue est du premier degré et a comme unique solution $x=0$.

Sinon, cette équation est du deuxième degré et a deux racines réelles $x_1=\dfrac{1-\sqrt{1-s^2}}{s}$: $x_2=\dfrac{1+\sqrt{1-s^2}}{s}$

Le produit des deux racines étant égal à 1, ces deux racines sont du même signe. Leur somme étant égale à $\dfrac{2}{s}$, donc du signe de s :

- Si $s<0$, ces racines sont toutes deux strictement négatives et situées de part et d'autre de -1. $x_1=\dfrac{1-\sqrt{1-s^2}}{s}>x_2=\dfrac{1+\sqrt{1-s^2}}{s}$
- Si $s>0$, ces racines sont toutes deux strictement positives et situées de part et d'autre de 1. $x_1=\dfrac{1-\sqrt{1-s^2}}{s}<x_2=\dfrac{1+\sqrt{1-s^2}}{s}$

Il y en a donc exactement une dans I et, dans les deux cas, il s'agit de $x_1=\dfrac{1-\sqrt{1-s^2}}{s}$. La « racine étoile » d'un réel s de I est le nombre réel $\dfrac{1-\sqrt{1-s^2}}{s}$



C. La famille des fonctions f_a et leurs courbes représentatives

1. On note que l'égalité obtenue dans l'examen de l'associativité signifie que, pour tout couple (s, t) de $I \times I$, et quel que soit u appartenant à I : $f_s \circ f_t(u) = f_{s*t}(u)$, c'est-à-dire que : $f_s \circ f_t = f_{s*t}$. L'application $s \in I \mapsto f_s \in F$ est un homomorphisme.

Cette application est surjective par construction de l'ensemble F. L'ensemble $(F, \circ)$ est déjà un groupe commutatif, image d'un groupe commutatif par un homomorphisme surjectif.

De plus, la relation $f_a = f_b$ implique que, en particulier, $f_a(0) = a = f_b(0) = b$ et donc $a = b$. L'application $s \in I \mapsto f_s \in F$ est aussi injective : elle est bijective. Les deux groupes $(I\ ;*)$ et $(F\ ;\circ)$ sont isomorphes.

Notamment, f_0 est l'application identique sur I et les fonctions f_a et f_{-a} sont réciproques l'une de l'autre.

2. En premier lieu, les fonctions f_a et f_{-a} étant réciproques l'une de l'autre, leurs courbes représentatives C_a et C_{-a} sont images l'une de l'autre par la réflexion d'axe la droite d'équation $y = x$ (la « première bissectrice »).

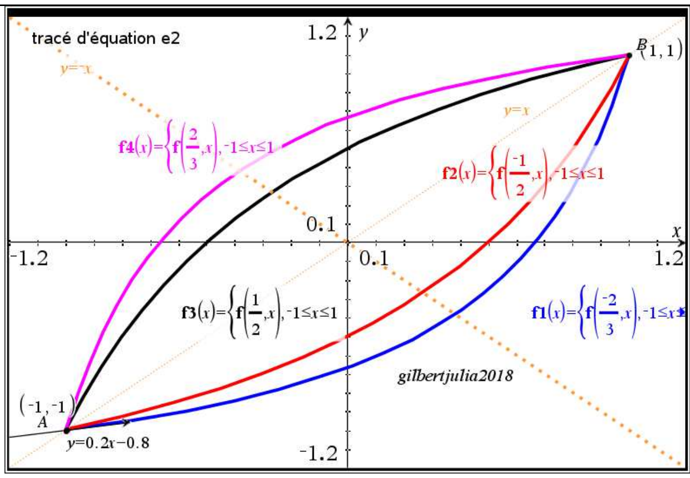
En second lieu, pour tout point $M(x,\ y)$ du plan et d'abscisse x appartenant à I :

$M \in C_a \Leftrightarrow y = a * x = \dfrac{x+a}{1+ax}$. Or : $y = a * x = \dfrac{x+a}{1+ax}$ gilbertjulia2018 $\Leftrightarrow -y = \dfrac{-x-a}{1+(-a)(-x)} = (-a)*(-x) = x$, c'est-à-dire que : $M \in C_a \Leftrightarrow M_1(-x, -y) \in C_{-a}$. Les courbes C_a et C_{-a} sont aussi images l'une de l'autre par la symétrie centrale de centre O.

Il en résulte que la courbe C_a est image d'elle-même, donc globalement invariante, par la composée de la réflexion d'axe la droite d'équation $y = x$ et de la symétrie centrale de centre O. Cette composée est la réflexion d'axe la droite d'équation $y = -x$ (la « deuxième bissectrice »).

3. Comme on l'a vu, f_a est la restriction à I d'une fonction dérivable sur l'intervalle fermé $[-1,\ 1]$.

Au point limite $A(-1, -1)$, C_a admet pour tangente la droite de coefficient directeur $\dfrac{1+a}{1-a}$ et au point limite $B(1, 1)$, C_a admet pour tangente la droite de coefficient directeur $\dfrac{1-a}{1+a}$



D. Un groupe de matrices et un autre d'endomorphismes du plan vectoriel

1. Quel que soit t appartenant à $I=\left]-1,\ 1\right[$, $\det(M_t)=1$: la matrice M_t est inversible et φ_t est un automorphisme de P.

2. Soit $\vec{u}$ de coordonnées $(x,\ y)$ dans la base $\left(\vec{i},\ \vec{j}\right)$. Les coordonnées de son image sont $\begin{cases} x'=\dfrac{x+t\,y}{\sqrt{1-t^2}} \\ y'=\dfrac{t\,x+y}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases}$.

$$\det\left(\vec{u},\ \varphi_t\left(\vec{u}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\begin{vmatrix} x & x+t\,y \\ y & t\,x+y \end{vmatrix}=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\left(x^2-y^2\right)$$

Si $t=0$, tout vecteur et son image sont des vecteurs liés : M_0 est la matrice unité et φ_0 est l'application identique.

Si $t\neq 0$, un vecteur $\vec{u}\ (x,\ y)$ et son image sont liés si et seulement si $x^2-y^2=0$. L'ensemble des vecteurs liés à leur image est la réunion de deux droites vectorielles : la droite d'équation $y=x$ et celle d'équation $y=-x$, droites vectorielles qui constituent les deux sous-espaces propres de φ_t.

On note que : $\varphi_t\left(\vec{i}+\vec{j}\right)=\dfrac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}\left(\vec{i}+\vec{j}\right)=\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}\left(\vec{i}+\vec{j}\right)$ tandis que $\varphi_t\left(\vec{i}-\vec{j}\right)=$ $\dfrac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}\left(\vec{i}-\vec{j}\right)=\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}\left(\vec{i}-\vec{j}\right)$.

Les deux valeurs propres de φ_t sont $\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}$ et $\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}$ et de plus $\left\{\left(\vec{i}+\vec{j}\right);\ \left(\vec{i}-\vec{j}\right)\right\}$ est une base de P formée de vecteurs propres.

3. Pour démontrer les relations proposées, on peut s'intéresser à la base de vecteurs propres et considérer la fonction g définie sur I par : $g(t)=\dfrac{1+t}{1-t}$. Alors, quel que soit le couple $(t,\ t')\in I\times I$:

$$g(t')\times g(t)=\frac{1+t'}{1-t'}\times\frac{1+t}{1-t}=\frac{1+t+t'+t\,t'}{1-t-t'+t\,t}=\frac{1+\dfrac{t+t'}{1+t\,t'}}{1-\dfrac{t+t'}{1+t\,t'}},$$

c'est-à-dire que : $g(t')\times g(t)=g(t'*t)$. La fonction $\sqrt{g(t)}=\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}$ et son inverse ont de ce fait la même propriété. (On va retrouver ces fonctions un peu plus loin).

Il en résulte que $\varphi_{t'}\circ\varphi_t\left(\vec{i}+\vec{j}\right)=\sqrt{g(t'*t)}\left(\vec{i}+\vec{j}\right)=\varphi_{t'*t}\left(\vec{i}+\vec{j}\right)$ et $\varphi_{t'}\circ\varphi_t\left(\vec{i}-\vec{j}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{g(t'*t)}}\left(\vec{i}-\vec{j}\right)=\varphi_{t'*t}\left(\vec{i}-\vec{j}\right)$.

Les endomorphismes $\varphi_{t'}\circ\varphi_t$ et $\varphi_{t'*t}$ coïncident sur une base donc ils sont égaux : $\varphi_{t'}\circ\varphi_t=\varphi_{t'*t}$.
Cette relation est équivalente à l'égalité de leurs matrices $M_{t'}\times M_t=M_{t'*t}$

L'application $t\in I\rightarrow\varphi_t\in\Phi$ est un homomorphisme, surjectif par construction de Φ. Déjà, Φ est un groupe commutatif et, s'il en est ainsi, E en est un aussi puisque pour tout t de I, φ_t est l'endomorphisme de P canoniquement associé à la matrice M_t.

.

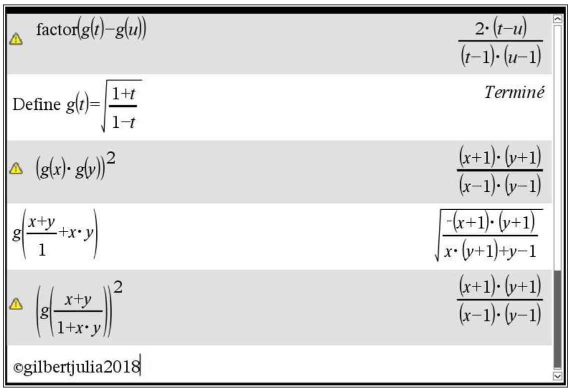
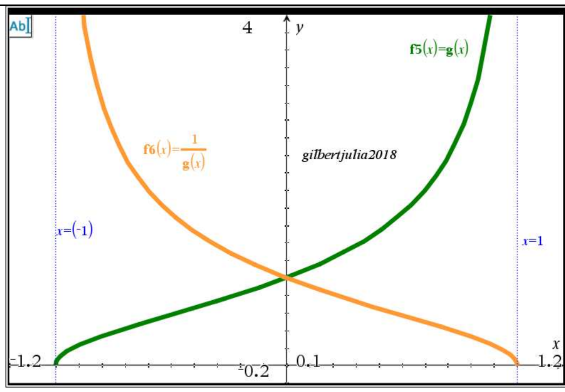
D'autre part, supposons que $\varphi_t = \varphi_{t'}$. Ces applications ont les mêmes valeurs propres, associées aux mêmes vecteurs propres : $\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}} = \sqrt{\dfrac{1+t'}{1-t'}}$. Il en résulte que : $\dfrac{1+t}{1-t} - \dfrac{1+t'}{1-t'} = \dfrac{2(t-t')}{(1-t)(1-t')} = 0$ et donc que : $t - t' = 0$. Ainsi : $\varphi_t = \varphi_{t'} \Rightarrow t = t'$. L'application $t \in I \to \varphi_t \in \Phi$ est de plus injective, c'est un isomorphisme de groupes. Il en est de même de l'application composée $t \in (I,\ *) \to \varphi_t \in (\Phi,\ \circ) \to M_t \in (E,\ \times)$

Les trois ensembles $(I,\ *)$; $(\Phi,\ \circ)$; $(E,\ \times)$ sont munis d'une structure de groupe commutatif et sont isomorphes.

D. Une équation fonctionnelle

1. La fonction g définie sur I par : $g(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$, comme son inverse multiplicatif, sont déjà intervenus dans la partie C à propos d'une histoire de valeurs propres. On note que pour tout x appartenant à I : $\dfrac{1}{g(x)} = g(-x)$; si g vérifie la **propriété P**, son inverse la vérifiera aussi.

Le calcul avait montré que d'une part : $\forall x \in I,\ \forall y \in I\ \ (g(x) \times g(y))^2 = \dfrac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}$ et d'autre part : $\forall x \in I,\ \forall y \in I\ \left(g\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)\right)^2 = \dfrac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}$. Les résultats sont identiques, les carrés des deux fonctions $(x,\ y) \mapsto g(x) \times g(y)$ et $(x,\ y) \mapsto g(x * y)$, définies sur $I \times I$, coïncident sur $I \times I$, donc les fonctions elles mêmes, toutes deux strictement positives sur $I \times I$, coïncident sur $I \times I$

$\forall x \in I,\ \forall y \in I\ \ g\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right) = g(x) \times g(y)$, la **propriété P** est vérifiée par g. Il est clair que les carrés des inverses sont égaux tous deux à $\dfrac{(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)}$, et coïncident aussi sur $I \times I$. $\forall x \in I,\ \forall y \in I\ \ \dfrac{1}{g\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)} = \dfrac{1}{g(x)} \times \dfrac{1}{g(y)}$, la **propriété P** est, comme prévu, vérifiée elle aussi.	
Représentations graphiques des deux fonctions. Du fait que $g(-x) = \dfrac{1}{g(x)}$, les deux courbes représentatives sont symétriques l'une de l'autre par rapport à Ox.	

2. Soit *f* une fonction constante sur *I*, $f(x)=k$ qui vérifie la **propriété P**. Nécessairement : $k^2=k$. Ou bien $k=0$, et *f* est la fonction nulle, ou bien $k \underset{gj}{=} 1$, et *f* est la fonction égale à 1 sur *I*.

Dans toute la suite, on suppose que f n'est pas la fonction nulle sur I.

3.1. Puisque f n'est pas la fonction nulle, il existe un réel a d'image $f(a)$ non nulle. $f(0)\times f(a)=f(0*a)=f(a)$. Par suite $(f(0)-1)\times f(a)=0$ ce qui implique $f(0)=1$

3.2. Pour tout réel *x* appartenant à *I* : $1=f(0)=f(x*(-x))=f(x)\times f(-x)$ ce qui implique d'abord que $f(x)$ est nécessairement non nul et en outre que $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$

3.3. Puisque $f(0)=1$ et que *f* ne s'annule pas sur *I*, *f* est strictement positive sur *I* : s'il existait un réel *a* de *I* tel que $f(a)<0$, zéro serait valeur intermédiaire prise au moins une fois par la fonction continue *f* entre zéro et *a* ; ce qui est exclu.

4.1. x et y appartenant à I : $f(x)\times f(y)=f\left(\dfrac{x+y}{1+x\,y}\right)$. Or : $\dfrac{x+y}{1+x\,y}-x \underset{gilbertjulia}{=} \dfrac{y(1-x^2)}{1+x\,y}$. Ainsi, en posant : $h=\dfrac{y(1-x^2)}{1+x\,y}$, on propose un réel h vérifiant $f(x)\times f(y)=f(x+h)$. Mais, pour l'instant, rien ne dit que ce soit le seul, c'est pourquoi on ne peut pas le « déterminer ».

4.2. Réciproquement, x et $x+h$ étant donnés dans I : Si on s'arrange pour que $x*y=x+h$, alors on aura trouvé un y convenable. Pour cela, on compose par $(-x)$: $y=(-x)*(x+h)=\dfrac{h}{1-x(x+h)}$. Mais, pour l'instant, rien ne dit que c'est le seul, c'est pourquoi l'injonction « déterminer » du texte original, que je n'ai pas modifiée dans l'énoncé, n'est pas tout à fait appropriée. Bref, on va quand même choisir celui là, on n'en connaît pas d'autre.

4.3. On suppose h non nul. Alors $\rho(x,h))=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \underset{gilbertjulia2018}{=} \dfrac{f(x)\times\left(f\left(\dfrac{h}{1-x(x+h)}\right)-1\right)}{h}$. Ce nombre est le taux de variation de *f* entre *x* et $x+h$.

4.4. On rappelle que $f(0)=1$; f étant supposée dérivable en zéro, il existe une fonction $\varepsilon(k)$ telle que : $f(k)=f(0)+k\,f'(0)+k\,\varepsilon(k)$. On applique ce développement avec $k=\dfrac{h}{1-x(x+h)}$, qui tend vers zéro en même temps que *h*.

Ainsi, $\dfrac{f\left(\dfrac{h}{1-x(x+h)}\right)-1}{h}=\dfrac{f'(0)}{1-x(x+h)}+\varepsilon\left(\dfrac{h}{1-x(x+h)}\right)$. Par passage à la limite : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(\dfrac{h}{1-x(x+h)}\right)-1}{h}\underset{gjulia}{=}\dfrac{f'(0)}{1-x^2}$. Donc $\lim\limits_{h\to 0}\rho(x,h)\underset{gjulia}{=}f(x)\times\dfrac{f'(0)}{1-x^2}$

En conclusion, *f* est dérivable en *x* et son nombre dérivé est $f(x)\times\dfrac{f'(0)}{1-x^2}$

5. On déduit de la question précédente que si *f* possède la **propriété P** et est dérivable en zéro, alors *f* est dérivable sur *I* et il existe une constante C telle que : $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{C}{1-x^2}$, cette constante étant le nombre dérivé de *f* en zéro.

En intégrant, il existe une constante *a* telle que : $\ln(f(x))=\dfrac{C}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)+a$.

La valeur de cette constante est déterminée par le fait que $f(0)=1$: $\ln(f(0))=0=a$. Ainsi : $\ln(f(x))=\dfrac{C}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$. En posant $k=\dfrac{C}{2}=\dfrac{f'(0)}{2}$, on obtient : $f(x)\underset{gj}{=}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^k$

Réciproquement, si *f* est ce genre là : $f(x)\underset{gj}{=}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^k$ avec *k* réel donné :

Cette fonction, en tant que fonction rationnelle, est dérivable sur *I*.

On a eu l'occasion de voir que $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)\times\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)=\dfrac{1+\dfrac{x+y}{1+x\,y}}{1-\dfrac{x+y}{1+x\,y}}=\dfrac{1+x*y}{1-x*y}$. En élevant à la puissance k :

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^k\times\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^k=\left(\frac{1+\dfrac{x+y}{1+x\,y}}{1-\dfrac{x+y}{1+x\,y}}\right)^k$$

. Une telle fonction *f* vérifie la **propriété P**.

(On peut vérifier que son nombre dérivé en zéro est égal à $2k$)

Les fonctions non nulles définies sur *I* et vérifiant la **propriété P** sont exactement les fonctions de la forme $f(x)\underset{gj}{=}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^k$

Représentations graphiques de quelques unes des fonctions possédant la propriété P.