Limoges Terminale C juin 1974 : une équation fonctionnelle

En contrepoint du sujet sur la « loi étoile », voici le sujet de Limoges série C juin série C 1974. Une équation fonctionnelle en lien avec celle du sujet « loi étoile ».
Il s'agit ici de résoudre l'équation fonctionnelle : $f(x+y)=f(x)*f(y)$ *où* f *est une fonction supposée dérivable en zéro.*

1. Le sujet

L'objectif du problème est de déterminer, s'il en existe, quelles sont les fonctions f définies sur **R** qui vérifient la relation universelle: $\forall x\in \mathbf{R},\ \forall y\in \mathbf{R},\ f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x).f(y)}$ **(1)** et qui, en outre, sont dérivables en zéro.

On note « **propriété Q** » la conjonction de la relation **(1)** et de la dérivabilité en zéro.

A. Un exemple

Soit g la fonction définie sur **R** par : $g(x)=\dfrac{\mathbf{e}^x-1}{\mathbf{e}^x+1}$.

1. Montrer que g est impaire

2. Etudier les variations de g. Montrer que g est une bijection de **R** sur l'intervalle $I=]-1,\ 1[$

3. Montrer que g vérifie la **propriété Q**.

B. Premières investigations

Soit f une fonction définie sur **R** et telle que $\forall x\in \mathbf{R},\ \forall y\in \mathbf{R},\ f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x).f(y)}$ **(1)**.

1. Montrer que s'il existe c tel que $f(c)=1$ ou bien $f(c)=-1$ alors f est constante sur **R**.

Dans toute la suite, on suppose que f n'est pas une fonction constante sur ***R****.*

2.1. En écrivant que $x=\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}$, montrer que quel que soit x appartenant à **R** : $-1<x<1$

2.2. Montrer que $f(0)=0$ puis que f est une fonction impaire.

3. Montrer par récurrence que quel que soit le réel x et quel que soit l'entier strictement positif n :
$\dfrac{1+f(nx)}{1-f(nx)}=\left(\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^n$

4. On pose $\dfrac{1+f(1)}{1-f(1)}=a$.

4.1. Calculer pour *n* entier naturel puis pour *n* entier relatif la valeur de $f(n)$ en fonction de *a*.

4.2. Calculer $f\left(\dfrac{p}{q}\right)$ pour $p\in \mathbf{Z}$ et $q\in \mathbf{N}^*$

C. On ajoute la dérivabilité en zéro

Soit *f* une fonction définie sur **R** et telle que $\forall x\in \mathbf{R},\ \forall y\in \mathbf{R},\ f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x).f(y)}$. On suppose de plus que *f* est dérivable en zéro et on note $f'(0)$ son nombre dérivé en ce point. (C'est-à-dire que *f* vérifie maintenant la **propriété Q**).

1. Soit *x* un nombre réel et *h* un réel non nul. On considère le rapport $\rho(x,h)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

En étudiant $\lim\limits_{h\to 0}\rho(x,h)$, montrer que *f* est dérivable en tout point *x* et que : $f'(x)=f'(0)\left[1-(f(x))^2\right]$.

2. Le nombre $f'(0)$ peut-il être nul ? Montrer que *f* est strictement monotone sur **R**.

3. On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de *f*. Montrer que $\left(f^{-1}\right)'(y)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}=\dfrac{1}{f'(0)\left(1-y^2\right)}$.

4. Calculer une primitive de la fonction $\dfrac{1}{1-x^2}$. En déduire f^{-1} puis *f*.

2. Eléments de correction

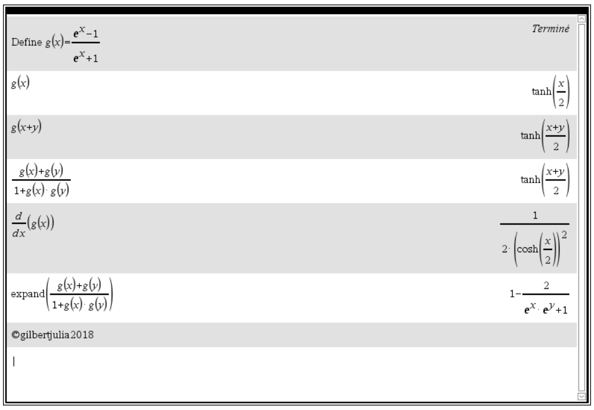
A. Un exemple

Soit g la fonction définie sur **R** par : $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$.

L'usage d'un logiciel de calcul formel provoque des affichages « inattendus » faisant référence à la trigonométrie hyperbolique. En particulier, la fonction g est interprétée comme une « tangente hyperbolique ».

La trigonométrie hyperbolique n'ayant jamais été au programme de la terminale C, le sujet n'y fait aucune référence. On peut y faire appel ou non.

Au lecteur de traiter cette partie comme bon lui semble.



B. Premières investigations

Soit f une fonction définie sur **R** et telle que $\forall x\in \mathbf{R},\ \forall y\in \mathbf{R},\ f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x).f(y)}$ **(1)**.

1. Supposons qu'il existe c tel que $f(c)=\pm 1$.

Pour tout x réel, on pose : $x=c+u$. Alors : $f(x)=f(c+u)\underset{gilbertjulia\,2018}{=}\dfrac{f(u)+f(c)}{1+f(c).f(u)}$

- Si $c=1$: $f(x)=\dfrac{f(u)+1}{1+f(u)}=1$. La fonction f est constante sur **R**, égale à 1 pour tout x.
- Si $c=-1$: $f(x)=\dfrac{f(u)-1}{1-f(u)}=-1$. La fonction f est constante sur **R**, égale à -1 pour tout x.

Dans toute la suite, on suppose que f n'est pas une fonction constante sur ***R****. En conséquence, elle ne prend jamais ni la valeur + 1 ni la valeur -1.*

2.1. En écrivant $x=\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}$: $f(x)=\dfrac{2f\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}$:

$$(1-f(x))\times(1+f(x))\underset{gilbertjulia\,2018}{=}\left(1-\frac{2f\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}\right)\times\left(1+\frac{2f\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}\right)$$ ce qui donne :

$$\left(1-f(x)\right)\times\left(1+f(x)\right)=\frac{1}{1+\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^4}\times\left(1-f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\times\left(1-f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$$, expression strictement positive sur **R**.

Le produit $\left(1-f(x)\right)\times\left(1+f(x)\right)$ étant strictement positif, chacun des deux facteurs est strictement positif (il n'est pas possible qu'ils soient tous deux strictement négatifs car $f(x)<-1 \Rightarrow 1-f(x)>0$ …).

Donc $-1<f(x)<1$. L'image par *f* de **R** est incluse dans l'intervalle $\left]-1,\ +1\right[$.

2.2. $f(0+0)-f(0)=0=\dfrac{2f(0)}{1+\left(f(0)\right)^2}-f(0)=\dfrac{f(0)\times\left(1-\left(f(0)\right)^2\right)}{1+\left(f(0)\right)^2}$. Le produit de facteurs $f(0)\times\left(1-\left(f(0)\right)^2\right)$ est nul, mais puisque $f(0)$ n'est égal ni à -1 ni à +1, nécessairement : $f(0)=0$

De ce fait, pour tout réel *x* : $f(x-x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{1+f(x).f(-x)}=f(0)=0$ ce qui implique que : $f(x)+f(-x)=0$

Quels que soient les deux réels opposés, ils ont des images opposées, la fonction *f* est une fonction impaire.

3. De façon générale, quels que soient les réels *x* et *y* :

$$\frac{1+f(x+y)}{1-f(x+y)}=\frac{1+\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x).f(y)}}{1-\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x).f(y)}}\underset{gjulia2018}{=}\frac{1+f(x).f(y)+f(x)+f(y)}{1+f(x).f(y)-f(x)-f(y)}=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\times\frac{1+f(y)}{1-f(y)}$$

Quel que soit le réel *x* et quel que soit l'entier strictement positif *n*, en appliquant la relation ci-dessus avec $y=nx$, on obtient : $\dfrac{1+f\left((n+1)x\right)}{1-f\left((n+1)x\right)}\underset{gjulia2018}{=}\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}\times\dfrac{1+f(nx)}{1-f(nx)}$ (relation de récurrence Λ)

La relation $\dfrac{1+f(nx)}{1-f(nx)}=\left(\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^n$ est trivialement vérifiée au rang 1, ce qui initialise au rang 1 cette relation, et si on la suppose vérifiée à un certain rang *n* alors la relation de récurrence Λ montre qu'elle est vérifiée au rang suivant. En effet :

$$\frac{1+f\left((n+1)x\right)}{1-f\left((n+1)x\right)}\underset{gjulia2018}{=}\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\times\frac{1+f(nx)}{1-f(nx)}=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\times\left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^n=\left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^{n+1}.$$

Cette relation est héréditaire.

Elle est donc vérifiée pour tout entier strictement positif *n*, et cela quel que soit le réel *x*.

4. On pose $\dfrac{1+f(1)}{1-f(1)}=a$.

4.1. En appliquant la relation précédente avec $x=1$:

Pour tout entier strictement positif n : $\dfrac{1+f(n)}{1-f(n)}=a^n$ ce qui donne l'expression en fonction de a :

$f(n)=\dfrac{a^n-1}{a^n+1}$. Par imparité : $f(-n)=-\dfrac{a^n-1}{a^n+1}=-\dfrac{a^n\left(1-a^{-n}\right)}{a^n\left(1+a^{-n}\right)}=\dfrac{a^{-n}-1}{a^{-n}+1}$.

L'expression en fonction de a : $f(n)=\dfrac{a^n-1}{a^n+1}$ est applicable quel que soit l'entier relatif n (y compris pour $n=0$: $f(0)=0=\dfrac{a^0-1}{a^0+1}$).

4.2. Soit $q\in \mathbf{N}^*$. En appliquant la formule de la question **3** avec $x=\dfrac{1}{q}$; $n=q$:

$$a=\frac{1+f\left(q\times\frac{1}{q}\right)}{1-f\left(q\times\frac{1}{q}\right)}=\left(\frac{1+f\left(\frac{1}{q}\right)}{1-f\left(\frac{1}{q}\right)}\right)^q \text{ ce qui donne : } \frac{1+f\left(\frac{1}{q}\right)}{1-f\left(\frac{1}{q}\right)}=a^{1/q} \text{ puis : } f\left(\frac{1}{q}\right)=\frac{a^{1/q}-1}{a^{1/q}+1}.$$

La formule **4.1.** s'étend aux inverses des entiers strictement positifs.

En appliquant maintenant la formule du **3** pour $p\in \mathbf{N}^*$ et $x=\dfrac{1}{q}$, on obtient :

$$\frac{1+f\left(p\times\frac{1}{q}\right)}{1-f\left(p\times\frac{1}{q}\right)}=\left(\frac{1+f\left(\frac{1}{q}\right)}{1-f\left(\frac{1}{q}\right)}\right)^p=a^{p/q} \text{ puis } f\left(\frac{p}{q}\right)-\frac{a^{p/q}-1}{a^{p/q}+1}.$$

La formule **4.1.** s'étend à tous les rationnels positifs.

Par imparité, $f\left(-\dfrac{p}{q}\right)=-\dfrac{a^{p/q}-1}{a^{p/q}+1}=\dfrac{a^{-p/q}-1}{a^{-p/q}+1}$.

La formule **4.1.** s'étend à tous les rationnels négatifs.

Cette formule est applicable à tous les rationnels.

C. On ajoute la dérivabilité en zéro

Soit f une fonction définie sur **R** et telle que $\forall x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R},\ f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x).f(y)}$. On suppose de plus que f est dérivable en zéro et on note $f'(0)$ son nombre dérivé en ce point. (C'est-à-dire que f vérifie maintenant la **propriété Q**).

1. Soit x un nombre réel et h un réel non nul :

$$f(x+h)-f(x)=\frac{f(x)+f(h)}{1+f(x).f(h)}-f(x)=\frac{f(h)\left(1-(f(x))^2\right)}{1+f(x).f(h)}.$$

$\rho(x,\ h)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \underset{gilbertjulia\,2018}{=} \dfrac{f(h)}{h}\times\dfrac{\left(1-(f(x))^2\right)}{1+f(x).f(h)}$ représente le taux de variation de f entre x et $x+h$.

L'hypothèse « f dérivable en zéro » se traduit ici par :

- D'abord $\lim\limits_{h\to 0} f(h)=f(0)=0$ car la dérivabilité de f en zéro implique sa continuité en ce point.
- Ensuite $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}=f'(0)$ par définition du nombre dérivé en zéro d'une fonction s'annulant en ce point.

On obtient : $\lim\limits_{h\to 0}\rho(x,h)=f'(0)\times\left(1-(f(x))^2\right)$.

Puisque la limite du taux de variation entre x et $x+h$ existe et est finie, f est dérivable en x et son nombre dérivé en ce point est cette limite : $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\rho(x,h)=f'(0)\times\left(1-(f(x))^2\right)$.

La fonction f est dérivable en tout point x de **R**.

2. Si $f'(0)=0$, alors $f'(x)=0$ pour tout x et f est une fonction constante, nécessairement la fonction nulle puisque $f(0)=0$. Ce cas est exclu par l'hypothèse « f non constante ».

Si $f'(0)\neq 0$, f' est sur **R** strictement du signe de $f'(0)$: la fonction f est strictement croissante si $f'(0)>0$, strictement décroissante si $f'(0)<0$. Etant continue (*a fortiori,* puisque dérivable) sur **R** et strictement monotone sur **R**, la fonction f réalise une bijection de **R** sur son intervalle image.

De cet intervalle image, on sait qu'il s'agit d'un intervalle inclus dans $]-1,\ 1[$.

Mais sachant que: $f(n)=\dfrac{a^n-1}{a^n+1}$ pour tout entier relatif n, ou bien $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^n-1}{a^n+1}=1$; $\lim\limits_{n\to-\infty}\dfrac{a^n-1}{a^n+1}=-1$ dans le cas où $a>1$, ou bien $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^n-1}{a^n+1}=-1$; $\lim\limits_{n\to-\infty}\dfrac{a^n-1}{a^n+1}=1$ dans le cas où $0<a<1$: l'intervalle image est exactement $]-1,\ 1[$

On désigne désormais par k le nombre réel non nul $k=f'(0)$

3. On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de *f*. En dérivant la composition de fonctions effectuée dans cet ordre : $\forall y \in \left]-1,\ 1\right[$: $f \circ f^{-1}(y) = y$, on obtient : $f'\left(f^{-1}(y)\right) \times \left(f^{-1}\right)'(y) = 1$ et par conséquent :

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} = \frac{1}{k\left(1-y^2\right)}.$$

4. Une primitive sur $I = \left]-1,\ 1\right[$ de la fonction $\dfrac{1}{1-y^2}$ étant la fonction $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$, il existe une constante C telle que : $\left(f^{-1}\right)(y) == \dfrac{1}{2k}\ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right) + C$. La valeur de C est déterminée par le fait que $f^{-1}(0) = 0$ (puisque 0 est invariant par *f*, il l'est aussi par f^{-1}). Condition qui donne $C = 0$.

Ainsi : $\left(f^{-1}\right)(y) \underset{gilbertjulia2018}{=} \dfrac{1}{2k}\ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$.

L'expression de $f(x)$ s'obtient en inversant la relation : $x = \left(f^{-1}\right)(y) \underset{gilbertjulia2018}{=} \dfrac{1}{2k}\ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$:

$\dfrac{1+y}{1-y} = \exp(2k\,x)$ donc $y = f(x) = \dfrac{\exp(2k\,x)-1}{\exp(2k\,x)+1}$. En notant $a = \exp(2k)$, on obtient : $y = f(x) = \dfrac{a^x - 1}{a^x + 1}$

Toute fonction non constante vérifiant la **propriété Q** est de cette forme. La fonction nulle est également de cette forme, elle correspond au cas $a = 1$.

Réciproquement, si une fonction est de la forme $f(x) = \dfrac{a^x - 1}{a^x + 1}$ avec a réel strictement positif, alors cette fonction est clairement dérivable en zéro, composée de la fonction dérivable $x \mapsto a^x$ puis d'une fonction rationnelle, et d'autre part, pour tout couple de réels $(x,\ y)$:

$$\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x).f(y)} = \frac{\dfrac{a^x-1}{a^x+1}+\dfrac{a^y-1}{a^y+1}}{1+\dfrac{a^x-1}{a^x+1}.\dfrac{a^y-1}{a^y+1}} \underset{gj}{=} \frac{\left(a^x-1\right)\left(a^y+1\right)+\left(a^x+1\right)\left(a^y-1\right)}{\left(a^x+1\right)\left(a^y+1\right)+\left(a^x-1\right)\left(a^y-1\right)} = \frac{2\left(a^x a^y-1\right)}{2\left(a^x a^y+1\right)} = \frac{a^{x+y}-1}{a^{x+y}-1} = f(x+y)$$

Cette fonction vérifie en outre la relation universelle **(1)**. Elle vérifie la **propriété Q**.

Les fonctions vérifiant la **propriété Q** sont exactement les fonctions de la forme $f(x) = \dfrac{a^x - 1}{a^x + 1}$ avec a réel strictement positif.