Liban 1978 Terminale C: calcul d'une intégrale de Gauss

Voici le problème Liban 1978, d'une difficulté déjà déconcertante pour un sujet de baccalauréat de l'époque et bien entendu inimaginable actuellement.

Il a pour objectif le calcul ambitieux d'une intégrale liée à la fonction de Gauss et intervenant en probabilités.

Pour parvenir au but, l'auteur du sujet développe sa propre démarche. On n'a pas la main, il faut « juste » tenter de suivre tant bien que mal le raisonnement de l'auteur du sujet avec son arsenal personnel de connaissances. C'était à cette époque une pratique courante et on la voit ici poussée à son extrême.

Nous sommes Thésée, nous avons à suivre un fil d'Ariane que l'on déroule pour nous, il reste à nous garder, du mieux que nous pourrons, des nombreux Minotaures embusqués. Ce n'est pas une mince affaire.

1. Le sujet

Soit *f* l'application de **R** dans **R** telle que $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \int_0^{\pi/4} \mathbf{exp}\left(-\frac{x}{\cos^2 t}\right) dt$

1. Montrer que $\forall x \geq 0,\ f(x) \leq \mathbf{e}^{-x}$. Quelle est la limite de *f* quand *x* tend vers + ∞ ?

.

2.1. Montrer que, pour tout réel *b* strictement positif :

$(\forall x \in \mathbf{R})\ \left[x \leq b \Rightarrow \mathbf{e}^x - 1 - x \leq \frac{1}{2}\mathbf{e}^b . x^2\right]$ et $(\forall x \in \mathbf{R})\ \left[x \geq -b \Rightarrow \mathbf{e}^x - 1 - x \geq \frac{1}{2}\mathbf{e}^{-b} . x^2\right]$

2.2. Montrer que, pour tout réel *a*, il existe une application φ_a de **R** dans **R**, continue en *a*, telle que $\varphi_a(a) = 0$ et $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) - f(a) = (x-a)\left[\int_0^{\pi/4} \frac{\mathbf{exp}\left(-\frac{a}{\cos^2 t}\right)}{\cos^2 t} dt + \varphi_a(x)\right]$. En déduire que *f* est différentiable. Préciser la dérivée *f'* de *f*.

3. Soit *P* une primitive (sur **R**) de l'application $u \mapsto \exp(-u^2)$. Á tout réel *x*, on associe l'application Q_x de $I = \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ dans **R**, telle que $\forall t \in \mathbf{R},\ Q_x(t) = P(x \tan t)$

3.1. Montrer que Q_x est dérivable sur *I* ; expliciter sa dérivée.

3.2. Prouver que : $\forall x \in \mathbf{R},\quad \int_0^x \mathbf{exp}(-u^2) du = x \int_0^{\pi/4} \frac{\mathbf{exp}(-x^2 \tan^2 t)}{\cos^2 t} dt$

4. Soit g l'application de **R** dans **R** telle que $\forall x \in \mathbf{R},\ g(x) = f(x^2)$. Soit g' sa dérivée.

4.1. Montrer que $\forall x \in \mathbf{R},\ g'(x) = -2\,\mathbf{exp}(-x^2)\int_0^x \mathbf{exp}(-t^2)\,dt$

4.2. Que peut-on dire da la fonction h telle que : $\forall x \in \mathbf{R},\ h(x) = g(x) + \left(\int_0^x \mathbf{exp}(-t^2)\,dt\right)^2$?

4.3. Quelle est la limite de $\int_0^x \mathbf{exp}(-t^2)\,dt$ quand x tend vers plus l'infini ?

2. Eléments de correction

Soit f l'application de **R** dans **R** telle que $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x)=\int_0^{\pi/4} \mathbf{exp}\left(-\frac{x}{\cos^2 t}\right) dt$

1. On va obtenir un peu mieux que ce qui est demandé :

Soit x un réel strictement positif.

$\forall t \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right],\ \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos t \leq 1$. Ce qui implique que $\forall t \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right],\ -2x \leq -\frac{x}{\cos^2 t} \leq -x$.

La fonction exponentielle étant une fonction strictement croissante sur **R** :
$\forall t \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right], \mathbf{exp}(-2x) \leq \mathbf{exp}\left(-\frac{x}{\cos^2 t}\right) \leq \mathbf{exp}(-x)$.

Les intégrales par rapport à la variable t de ces trois fonctions sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$ (dont deux sont constantes par rapport à t) sont rangées dans le même ordre.

$$\frac{\pi}{4}\mathbf{exp}(-2x) = \int_0^{\pi/4} \mathbf{exp}(-2x)\,dt \leq \int_0^{\pi/4} \mathbf{exp}\left(-\frac{x}{\cos^2 t}\right) dt \leq \int_0^{\pi/4} \mathbf{exp}(-x)\,dt = \frac{\pi}{4}\mathbf{exp}(-x).$$

On obtient ainsi la double inégalité : $\frac{\pi}{4}\mathbf{exp}(-2x) \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}\mathbf{exp}(-x)$ et cela quel que soit le réel strictement positif x. Le résultat demandé dans cette question en découle si on tient compte que $\frac{\pi}{4}\mathbf{exp}(-x) \leq \mathbf{exp}(-x)$.

Puisque f est encadré par deux fonctions ayant pour limite zéro quand x tend vers $+\infty$, d'après le théorème des gendarmes, f a elle aussi pour limite zéro en $+\infty$.

2.1. On considère d'une part la fonction r_b définie sur $\left]-\infty,\ b\right]$ par : $r_b(x) = \frac{1}{2}\mathbf{e}^b.x^2 - \mathbf{e}^x + 1 + x$

Sa fonction dérivée première est la fonction : $r_b'(x) = \mathbf{e}^b.x - \mathbf{e}^x + 1$.

Sa fonction dérivée seconde est la fonction : $r_b''(x) = \mathbf{e}^b - \mathbf{e}^x$. Vu que la fonction exponentielle est strictement croissante sur **R,** cette fonction est strictement positive pour $x < b$.

En conséquence, la fonction dérivée première est strictement croissante sur $\left]-\infty,\ b\right]$, et puisque $r_b'(0) = 0$, cette fonction est du signe de x, négative sur $\left]-\infty,\ 0\right]$ et positive sur $[0,\ b]$.

La fonction r_b est strictement décroissante sur $\left]-\infty,\ 0\right]$,strictement croissante sur $[0,\ b]$ et admet un minimum en zéro. Vu que $r_b(0)=0$, ce minimum est nul, la fonction r_b est positive sur $\left]-\infty,\ b\right]$.

Ainsi $(\forall x \leq b)$ $_{gilbertjulia2018}$ $\left[\frac{1}{2}\mathbf{e}^b.x^2 - \mathbf{e}^x + 1 + x \geq 0\right]$, c'est-à-dire $(\forall x \leq b)$ $\left[\mathbf{e}^x - 1 - x \leq \frac{1}{2}\mathbf{e}^b.x^2\right]$, l'égalité n'ayant lieu que lorsque $x = 0$.

On considère d'autre part la fonction s_b définie sur par : $s_b(x) = \frac{1}{2}\mathbf{e}^{-b}.x^2 - \mathbf{e}^x + 1 + x$

Sa fonction dérivée première est la fonction : $s_b'(x) = \mathbf{e}^{-b}.x - \mathbf{e}^x + 1$.

Sa fonction dérivée seconde est la fonction : $s_b''(x) = \mathbf{e}^{-b} - \mathbf{e}^x$. Vu que la fonction exponentielle est strictement croissante sur **R,** cette fonction est strictement négative pour $x > -b$.

En conséquence, la fonction dérivée première est strictement décroissante sur $\left[-b,\ +\infty\right[$, et puisque $s_b'(0) = 0$, cette fonction est du signe opposé à celui de *x*, positive sur $[-b,\ 0]$ et négative sur $\left[0,\ +\infty\right[$.

La fonction s_b est strictement croissante sur $[-b,\ 0]$, strictement décroissante sur $\left[0,\ +\infty\right[$ et admet un maximum en zéro. Vu que $s_b(0) = 0$, ce maximum est nul, la fonction s_b est négative sur . $\left[-b,\ +\infty\right[$

Ainsi $(\forall x \geq -b)$ $_{gilbertjulia2018}$ $\left[\frac{1}{2}\mathbf{e}^{-b}.x^2 - \mathbf{e}^x + 1 + x \leq 0\right]$, c'est-à-dire $(\forall x \geq -b)$ $_{gilbertjulia2018}$ $\left[\mathbf{e}^x - 1 - x \geq \frac{1}{2}\mathbf{e}^{-b}.x^2\right]$, l'égalité n'ayant lieu que lorsque $x = 0$.

NB. Si l'on tient compte que d'autre part pour tout réel x $\mathbf{e}^x - 1 - x \geq 0$, on peut déduire de cette question que quel que soit le réel *x* de l'intervalle $[-b,\ b]$ où *b* est strictement positif, $_{gilbertjulia2018}$ $\left|\mathbf{e}^x - 1 - x\right| \leq \frac{1}{2}\mathbf{e}^b.x^2$.

En conséquence, si on définit sur **R** la fonction epsilon par : $_{gilbertjulia2018}$ $\begin{cases} \varepsilon(0) = 0 \\ \varepsilon(x) = \dfrac{\mathbf{e}^x - 1 - x}{x} \quad si \quad x \neq 0 \end{cases}$, on obtient une fonction telle que pour tout x non nul de l'intervalle $[-b,\ b]$: $|\varepsilon(x)| = \left|\dfrac{\mathbf{e}^x - 1 - x}{x}\right| \leq \mathbf{e}^b|x|$, ce qui assure que $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0 = \varepsilon(0)$ donc la continuité de la fonction epsilon en zéro. Cette fonction est continue sur **R**.

2.2. Soit a un nombre réel. Par linéarité de l'intégrale : $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) - f(a) = \int_0^{\pi/4} \left[\mathbf{exp}\left(-\frac{x}{\cos^2 t} \right) - \mathbf{exp}\left(-\frac{a}{\cos^2 t} \right) \right] dt$, ce qui peut s'écrire :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) - f(a) \underset{\text{gilbertjulia2018}}{=} \int_0^{\pi/4} \mathbf{exp}\left(-\frac{a}{\cos^2 t} \right) \left[\mathbf{exp}\left(-\frac{x-a}{\cos^2 t} \right) - 1 \right] dt$$

Lorsque t appartient à l'intervalle $\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$, $1 \le \frac{1}{\cos^2 t} \le 2$.

Si on considère que x appartient à un segment de centre a (disons $[a-b,\ a+b]$ avec $b > 0$) on aura dans cet intervalle : $\frac{|x-a|}{\cos^2 t} \le 2b$, on peut y appliquer la remarque de la question précédente avec le nombre $2b$ et la fonction epsilon telle qu'elle y a été définie :

$$\mathbf{exp}\left(-\frac{x-a}{\cos^2 t} \right) - 1 = -\frac{x-a}{\cos^2 t} - \left(\frac{x-a}{\cos^2 t} \right) \varepsilon\left(\frac{x-a}{\cos^2 t} \right).$$

En tenant compte de cette relation :
$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) - f(a) = \int_0^{\pi/4} \mathbf{exp}\left(-\frac{a}{\cos^2 t} \right) \left[-\frac{x-a}{\cos^2 t} - \left(\frac{x-a}{\cos^2 t} \right) \varepsilon\left(\frac{x-a}{\cos^2 t} \right) \right] dt$ soit :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) - f(a) = -(x-a) \int_0^{\pi/4} \frac{\mathbf{exp}\left(-\frac{a}{\cos^2 t} \right)}{\cos^2 t} dt \underset{\text{gilbertjulia2018}}{-} (x-a) \int_0^{\pi/4} \frac{\mathbf{exp}\left(-\frac{a}{\cos^2 t} \right)}{\cos^2 t} \left[\varepsilon\left(\frac{x-a}{\cos^2 t} \right) \right] dt$$

En notant : $\varphi_a(x) = \int_0^{\pi/4} \frac{\mathbf{exp}\left(-\frac{a}{\cos^2 t} \right)}{\cos^2 t} \left[\varepsilon\left(\frac{x-a}{\cos^2 t} \right) \right] dt$, on observe d'une part que $\varphi_a(a) = 0$ puisque la fonction epsilon s'annule en zéro et d'autre part que pour x appartenant à un intervalle $[a-b,\ a+b]$ avec $b > 0$: $|\varphi_a(x)| \le \int_0^{\pi/4} \frac{\mathbf{exp}\left(-\frac{a}{\cos^2 t} \right)}{\cos^2 t} |x-a| \mathbf{e}^{2b} dt$.

On obtient une majoration du type $|\varphi_a(x)| \le K|x-a|$, ce qui assure que : $\lim_{x \to a} \varphi_a(x) = 0 = \varphi_a(a)$ et la continuité de cette fonction φ_a au point a.

Il existe ainsi une application φ_a de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, continue en a, telle que $\varphi_a(a) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) - f(a) \underset{\text{gilbertjulia2018}}{=} (x-a) \left[-\int_0^{\pi/4} \frac{\mathbf{exp}\left(-\frac{a}{\cos^2 t} \right)}{\cos^2 t} dt + \varphi_a(x) \right].$$

On en déduit que : $\forall x \neq a,\ \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\mathbf{exp}\left(-\dfrac{a}{\cos^2 t}\right)}{\cos^2 t}\,dt + \varphi_a(x)$ puis que $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathbf{exp}\left(-\frac{a}{\cos^2 t}\right)dt$, le taux de variation a une limite finie quand x tend vers a.

f est différentiable en a et la dérivée f' de f est la fonction : $a \mapsto -\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathbf{exp}\left(-\frac{a}{\cos^2 t}\right)dt$

3. Soit P une primitive (sur **R**) de l'application $u \mapsto \exp\left(-u^2\right)$. Á tout réel x, on associe l'application Q_x de $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ dans **R**, telle que $\forall t \in \mathbf{R},\ Q_x(t) = P(x\tan t)$

3.1. Si $x = 0$, Q_x est une fonction constante : $\forall t \in \mathbf{R},\ Q_0(t) = P(0)$, cette constante dépendant de la primitive choisie. Elle est dérivable sur **R**, de dérivée la fonction nulle.

Sinon, si $x \neq 0$, la fonction $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[\mapsto x\tan t$ est dérivable sur I et a pour dérivée la fonction $t \mapsto \dfrac{x}{\cos^2 t}$. Elle applique l'intervalle I sur **R.** La fonction $u \mapsto P(u)$ est quant à elle définie et dérivable sur **R**, de dérivée la fonction $u \mapsto \exp\left(-u^2\right)$.

Q_x est dérivable sur I car composée de fonctions dérivables et sa dérivée est la fonction $t \mapsto \dfrac{x}{\cos^2 t} \times \exp\left(-x^2\tan^2 t\right)$.

Cette expression peut être étendue au cas $x = 0$

3.2. On veut prouver que : $\forall x \in \mathbf{R},\quad \displaystyle\int_0^x \mathbf{exp}\left(-u^2\right)du = x\int_0^{\pi/4} \frac{\mathbf{exp}\left(-x^2\tan^2 t\right)}{\cos^2 t}\,dt$

Pour cela, on s'intéresse à la fonction définie par : $R(x) = x\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\mathbf{exp}\left(-x^2\tan^2 t\right)}{\cos^2 t}\,dt$.

Elle s'annule en zéro.

D'autre part : $R(x)=\int_0^{\pi/4}\mathbf{exp}\left(-x^2\tan^2 t\right)\left(\dfrac{x}{\cos^2 t}\right)dt$

On reconnaît un lien avec la fonction Q_x étudiée ci-dessus : $R(x)=\int_0^{\pi/4}Q_x\,'(t)\,dt$

On obtient $R(x)=Q_x\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-Q_x(0)=P(x)-P(0)=\int_0^x\mathbf{exp}\left(-t^2\right)dt$

Une autre justification consisterait à écrire que $R(x)=\int_0^{\pi/4}\mathbf{exp}\left(-x^2\tan^2 t\right)\left(\dfrac{x}{\cos^2 t}\right)dt$ puis à envisager dans l'intégrale, pour x non nul, le changement de variable : $u=x\tan t$.

Pour ce changement de variable : $du=\dfrac{x}{\cos^2 t}dt$.

On obtient que : $\forall x\in$ **R*,** $R(x)=\int_0^x\mathbf{exp}\left(-u^2\right)\,du$.

Si $x=0$, le changement de variable est sans objet, mais les deux expressions en question coïncident aussi (nulles toutes deux). L'égalité a lieu pour tout réel x, nul ou non nul.

Ainsi, quelle que soit la justification choisie, on obtient : $\int_0^x\mathbf{exp}\left(-u^2\right)du=x\int_0^{\pi/4}\dfrac{\mathbf{exp}\left(-x^2\tan^2 t\right)}{\cos^2 t}dt$

4. Soit g l'application de **R** dans **R** telle que $\forall x\in$ **R,** $g(x)=f\left(x^2\right)$. Soit g' sa dérivée.

4.1. La fonction g apparaît comme une composition de fonctions. En appliquant les règles de dérivation d'une fonction composée : $g'(x)=(2x)\times f'\left(x^2\right)$

C'est-à-dire : $g'(x)=(2x)\times\left(-\int_0^{\pi/4}\dfrac{1}{\cos^2 t}\mathbf{exp}\left(-\dfrac{x^2}{\cos^2 t}\right)\right)dt$

En tenant compte de la relation trigonométrique : $\dfrac{1}{\cos^2 t}=\tan^2 t+1$, on obtient :

$g'(x)=-2\int_0^{\pi/4}\dfrac{x}{\cos^2 t}\mathbf{exp}\left(-x^2\left(\tan^2 t+1\right)\right)dt$

C'est-à-dire : $g'(x)=-2\,\mathbf{exp}\left(-x^2\right)\left(x\int_0^{\pi/4}\dfrac{1}{\cos^2 t}\mathbf{exp}\left(-x^2\tan^2 t\right)\right)dt$

Vu la relation de la question précédente : $g'(x) = -2\,\mathbf{exp}\left(-x^2\right) \int_0^x \mathbf{exp}\left(-u^2\right) du$

Si on effectue le changement de variable : $u = x\tan t$, on obtient : $u^2 = x^2 \tan^2 t = \dfrac{x^2}{\cos^2 t} - x^2$ et

$du = \dfrac{x\,dt}{\cos^2 t}$

$$g'(x) = (2x) \times \left(-\int_0^x \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathbf{exp}\left(-u^2 - x^2\right)\right) dt = -2\left(\int_0^x \mathbf{exp}\left(-u^2 - x^2\right)\right) du$$

Ce qui donne : $g'(x) = (2x) \times \left(-\int_0^x \dfrac{1}{\cos^2 t}\,\mathbf{exp}\left(-u^2 - x^2\right)\right) dt = -2\,\mathbf{exp}\left(-x^2\right) \times \left(\int_0^x \mathbf{exp}\left(-u^2\right)\right) du$

4.2. Soit la fonction h telle que : $\forall x \in \mathbf{R},\ h(x) = g(x) + \left(\int_0^x \mathbf{exp}\left(-t^2\right) dt\right)^2$.

La dérivée de cette fonction est : $h'(x) = g'(x) + 2\,\mathbf{exp}\left(-x^2\right)\left(\int_0^x \mathbf{exp}\left(-t^2\right) dt\right)$.

En effet, la dérivée de la fonction $x \mapsto \int_0^x \mathbf{exp}\left(-t^2\right) dt$ est la valeur en x de la fonction intégrée, et il s'agit de dériver le carré de cette fonction. On obtient de fait la fonction $-g'(x)$

Ainsi pour tout réel x : $h'(x) = g'(x) - g'(x) = 0$. La fonction h est une fonction constante.

On obtient la valeur de cette constante en considérant la valeur en zéro : $h(0) = g(0) = f(0)$.

Or $f(0) = \int_0^{\pi/4} 1\,dt = \dfrac{\pi}{4}$. La constante en question est $\dfrac{\pi}{4}$

Pour tout réel x : $g(x) + \left(\int_0^x \mathbf{exp}\left(-t^2\right) dt\right)^2 = \dfrac{\pi}{4}$

4.3. Soit l la limite de $\int_0^x \mathbf{exp}\left(-t^2\right)dt$ quand x tend vers plus l'infini.

En passant à la limite dans la relation précédente : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)+l^2=\dfrac{\pi}{4}$.

Et d'après la question **1** du problème : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x^2\right)=0$

Donc $l^2=\dfrac{\pi}{4}$.

En fin de compte : $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x \mathbf{exp}\left(-t^2\right)dt=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

En 1978, le Liban était en proie à une guerre civile.

On ne peut qu'avoir une pensée distinguée pour les candidats libanais au baccalauréat français session 1978.

NB. Dans la partie « arithmétique », figure un des deux exercices accompagnant ce problème. Cet exercice est lui aussi quelque peu insolite, contrastant avec l'ambiance où l'on se trouve ici. Contrairement à ce problème très directif, on peut dire de lui qu'il s'agit d'un exercice « avec prise d'initiative ».

Il se prêterait éventuellement à une résolution « contemporaine » avec l'artillerie de l'algorithmique. J'invite le lecteur à le rechercher dans la page « Ecrit du CAPES ».