# Théorème de Lamé.

*« Gabriel Lamé (1795-1870): physicien, mathématicien et ingénieur : professeur de physique à l'école polytechnique, on lui doit des leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs applications ».*

On se donne deux entiers strictement positifs $a$ et $b$ ($a \geq b$).
La recherche du PGCD de ces deux nombres à l'aide de l'algorithme d'Euclide se fait par divisions successives.
Par exemple : PGCD (48, 18) = 6 car, successivement :
48= 2×18 + 12 18 = 1×12 + 6 12 = 2×6 + 0
Il a fallu trois divisions pour arriver à la conclusion.

Mais plus généralement, combien faut-il de divisions pour arriver à obtenir le PGCD ?

Le théorème de Lamé donne une réponse à cette question. Il a pour énoncé:

***"Le nombre de divisions euclidiennes nécessaires pour obtenir le pgcd de deux entiers naturels non nuls, en appliquant l'algorithme d'Euclide, est inférieur ou égal à 5 fois le nombre de chiffres servant à écrire le plus petit des deux nombres"***

L'objectif du problème est de démontrer le théorème de Lamé…

On désignera dans la suite $L(a,\ b)$ ce nombre de divisions nécessaires pour obtenir le PGCD de $a$ et de $b$, en considérant que l'on s'arrête lorsqu'il apparaît un reste nul (le PGCD étant le dernier reste non nul). Ce nombre est la « longueur » de l'algorithme d'Euclide, pour les entiers $a$ et $b$.

**A. Préliminaires**
1. Déterminer à titre d'exemple $L(585,\ 117)$ et $L(55,\ 34)$

2. Exploiter le deuxième exemple étudié pour proposer des couples $(a,\ b)$ d'entiers naturels tels que :
2.1. Le plus petit des entiers s'écrit avec un seul chiffre, et $L(a,\ b) = 5$
2.2. Le plus petit des entiers s'écrit avec deux chiffres, et $L(a,\ b) = 10$ (*continuez la suite de nombres « vers le haut »*)

**B. Suites de Fibonacci.**
Le cas 55 et 34 est un cas où la situation est la plus défavorable possible : tous les quotients des divisions successives sont égaux à 1, et l'algorithme d'Euclide a le même nombre d'étapes que l'algorithme des soustractions successives. On se propose de construire des suites d'entiers pour lesquels on obtient ces cas défavorables.

On appelle suite de Fibonacci, toute suite de nombres réels donnée par la donnée de ses deux premiers termes $u_0$ et $u_1$ et par la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$. On note F l'ensemble des suites de Fibonacci.
1. Soit $(u_n)$ une suite de Fibonacci. Montrer que, si $u_0$ et $u_1$ sont deux entiers naturels non nuls, tels que $u_0 \leq u_1$ alors :
1.1. Pour tout entier naturel $n$ : $u_n$ est un entier naturel non nul.
1.2. Pour tout entier $n \geq 1$ : $u_n < u_{n+1}$ (la suite est strictement croissante à partir du rang 1)
1.3. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, $u_{n-1}$ est le reste de la division euclidienne de $u_{n+1}$ par $u_n$.
1.4. Déduire du 1.3 que pour tout entier naturel $n$ : $PGCD\left(u_{n+1}, u_n\right) = PGCD\left(u_1, u_0\right)$

2. Montrer que si $u_0 < u_1$ alors : $L\left(u_{n+1}, u_n\right) = n + L\left(u_1, u_0\right)$, et si $u_0 = u_1$ alors $L\left(u_{n+1}, u_n\right) = n$.

3. Exemple : Calculer $u_4$ et $u_5$ quand $u_0 = 18$ ; $u_1 = 48$ et expliciter $L(u_5, u_4)$

4. *Etude générale des suites de Fibonacci.*

Soit $q$ un nombre réel non nul. On considère la suite $(q_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par : $q_n = q^n$. (Cette suite est donc celle des puissances du réel $q$).

4.1. Montrer qu'il existe deux valeurs de $q$ pour lesquelles la suite $(q_n)$ appartient à F, et que ces deux valeurs sont les deux solutions de l'équation : $q^2 - q - 1 = 0$. Les expliciter.

On désigne désormais par $\alpha$ et $\beta$ les deux solutions de l'équation : $q^2 - q - 1 = 0$ (on notera $\alpha$ celle des solutions qui est strictement positive).

4.2. On se donne une suite de Fibonacci $(u_n)$, déterminée par ses deux premiers termes $u_0$ et $u_1$. Montrer que le système d'inconnues $x$ et $y$ : $\begin{cases} x + y = u_0 \\ x\alpha + y\beta = u_1 \end{cases}$ admet une solution que l'on exprimera en fonction de $u_1$, $u_0$, $\alpha$ et $\beta$. Montrer qu'alors, pour tout entier $n$ : $x\alpha^n + y\beta^n = u_n$

5. *Une suite particulière.*

On note $(f_n)$ la suite de Fibonacci obtenue lorsque les deux premiers termes sont : $f_0 = f_1 = 1$

5.1. Calculer les seize premiers termes de cette suite (à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur)

5.2. Comment s'exprime dans le cas $L(f_{n+1}, f_n)$ en fonction de $n$ ?

5.3. Peut-on trouver des entiers $a$ et $b$ tels que $b$ s'écrit avec trois chiffres et : $L(a,b) = 15$ ?

5.4. Montrer que pour tout enlier $n \geq 1$ : $f_n \geq \alpha^{n-1}$, l'inégalité devenant stricte dès le rang 2.

**C. Démonstration du théorème de Lamé:**

Soit deux entiers naturels non nuls $a$ et $b$ tels que $a > b$.

On suppose, dans la suite, que l'algorithme d'Euclide pour déterminer leur PGCD comporte $n$ étapes avec $n \geq 2$.

En posant $r_0 = a$ ; $r_1 = b$ on peut schématiser l'algorithme d'Euclide sous la forme :

| | | |
|---|---|---|
| $r_0 = q_1 r_1 + r_2$ | avec $0 < r_2 < r_1$ | |
| $r_1 = q_2 r_2 + r_3$ | avec $0 < r_3 < r_2$ | |
| … | …. | |
| $r_{n-2} = q_{n-1} r_{n-1} + r_n$ | avec $0 < r_n < r_{n-1}$ | $r_n$ : dernier reste non nul |
| $r_{n-1} = q_n r_n + 0$ | STOP Il y a $n$ étapes dans l'algorithme. | |

1. Montrer que tous les quotients $q_k$ sont strictement positifs, et que le dernier $q_n$ est $\geq 2$.

2. Justifier que $r_n \geq f_1$ ; $r_{n-1} \geq f_2$ . Plus généralement, montrer que pour tout entier $i$ tel que $0 \leq i < n$ : $r_{n-i} \geq f_{i+1}$. Qu'est ce que cela donne lorsque $i = n - 1$ ?

3. Montrer que le nombre de chiffres de l'entier $f_n$ est supérieur ou égal à $\frac{n}{5}$. (Considérer le logarithme à base dix du nombre $\alpha$, dont une calculatrice donnera une valeur approchée par défaut).

En déduire le théorème de Lamé.