Théorème de Lamé : éléments de correction.

A. Préliminaires.

1. On obtient $L(585,\ 117)=1$ car 585 est multiple de 117. L'algorithme est de longueur 1.

Puis successivement : 55 = 1×34 + 21 34 = 1×21 + 13 21 = 1×13 + 8 13 = 1×8 + 5
8 = 1×5 + 3 5 = 1×3 + 2 3 = 1×2 + 1 2 = 2×1 + 0
$L(55,\ 34)=8$ L'algorithme est de longueur 8.

2. Si on choisit les entiers 13 et 8, présents dans l'algorithme précédents, *b* s'écrit avec un chiffre, et l'algorithme d'Euclide est de longueur 5.
Si on considère dans la question précédente les entiers 55 + 34 = 89 et 89 + 55 = 144, qui continueraient la suite d'entiers « vers le haut », on constate que : $L(144,\ 89)=10$ car il y a deux divisions de plus dans l'algorithme d'Euclide.

B Fibonacci.

1. Si u_0 et u_1 sont deux entiers naturels non nuls, tels que $u_0 \le u_1$ alors :

1.1. Par récurrence évidente u_n est un entier naturel non nul, car la somme de deux entiers naturels est un entier naturel non nul.

1.2. Pour tout entier $n \ge 1$: $u_{n+1} - u_n = u_{n-1}$ et u_{n-1} est un entier naturel non nul. Donc $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout entier n au moins égal à 1

1.3. D'après la question précédente pour tout entier n au moins égal à 2 : $u_{n+1} - u_n = u_{n-1}$ avec $0 < u_{n-1} < u_n$.
L'écriture satisfait les critères de la division euclidienne de u_{n+1} par u_n. Donc, jusque là : la relation de récurrence est vérifiée. $PGCD(u_{n+1}, u_n) = PGCD(u_n, u_{n-1})$
On obtient en l'itérant $n - 1$ fois (c'est utile de noter ce nombre) : $PGCD(u_{n+1}, u_n) = PGCD(u_2, u_1)$
Il reste le cas des termes initiaux : $u_2 = u_1 + u_0$ avec $u_0 \le u_1$. Si l'inégalité est stricte, alors cette écriture est encore celle d'une division euclidienne et $PGCD(u_{n+1}, u_n) = PGCD(u_2, u_1) = PGCD(u_1, u_0)$
S'il y a égalité, alors $PGCD(u_2, u_1) = PGCD(2u_1, u_1) = u_1 = PGCD(u_1,\ u_0)$. La propriété est encore vérifiée, même si la relation $u_2 = u_1 + u_0$ n'est plus une division euclidienne.

2. Puisque les $n - 1$ itérations à propos des PGCD du 1.3 sont exactement celles que donne l'algorithme d'Euclide, on a déjà : $L(u_{n+1}, u_n) = n - 1 + L(u_2, u_1)$. Une dernière itération donne : $L(u_{n+1}, u_n) = n + L(u_1, u_0)$ lorsque $u_0 < u_1$ puisque la dernière itération est une division euclidienne.
Lorsque $u_0 = u_1$, on obtient $L(u_{n+1}, u_n) = n - 1 + L(2u_1, u_1) = n$ car la dernière division euclidienne de $2u_1$ par u_1 donne un reste nul.

3. Exemple : Quand $u_0 = 18$; $u_1 = 48$ on obtient successivement comme termes suivants : 66, 114, 180, 294, 474, …
On constate que l'algorithme d'Euclide va donner : 294 = 180 + 114, puis 180 = 114 + 66, puis 114 = 66 + 48, puis 66 = 48 + 18 donc 4 divisions et on enchaîne par les 3 divisions du début de l'énoncé. On obtient un algorithme de longueur 7.

4.1. Le nombre non nul q doit vérifier pour tout entier n : $q^{n+2} - q^{n+1} - q^n = q^n(q^2 - q - 1) = 0$. Comme le terme q^n ne s'annule pas pour toutes les valeurs de n, c'est l'autre qui doit s'annuler.
On obtient comme valeurs possibles : $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

4.2. Le système $\begin{cases} x+y=u_0 \\ x\alpha+y\beta=u_1 \end{cases}$ a pour déterminant β - α qui est non nul. Le système a donc toujours une solution, qui est : $x=\dfrac{\begin{vmatrix} u_0 & 1 \\ u_1 & \beta \end{vmatrix}}{\beta-\alpha}=\dfrac{\beta u_0-u_1}{\beta-\alpha}$ et $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & u_0 \\ \alpha & u_1 \end{vmatrix}}{\beta-\alpha}=\dfrac{u_1-\alpha u_0}{\beta-\alpha}$

La résolution du système permet d'initialiser la relation $x\alpha^n+y\beta^n=u_n$ sur *deux rangs successifs*, les deux premiers 0 et 1. Supposons la relation vérifiée aux rangs n et n – 1. On note que α et β sont les deux seuls réels qui vont vérifier la relation $q^{n+1}=q^n+q^{n-1}$ puisque $\alpha^2=\alpha+1$ et pareil pour β.
Ainsi : $x\alpha^{n+1}+y\beta^{n+1}=x(\alpha^n+\alpha^{n-1})+y(\beta^n+\beta^{n-1})=(x\alpha^n+y\beta^n)+(x\alpha^{n-1}+y\beta^{n-1})$. On obtient d'après l'hypothèse de récurrence : $x\alpha^{n+1}+y\beta^{n+1}=x(\alpha^n+\alpha^{n-1})+y(\beta^n+\beta^{n-1})=u_n+u_{n-1}=u_{n+1}$
La relation est donc héréditaire. (Elle va être vérifiée aux rangs n et n + 1). Elle est donc vérifiée pour tout entier.

5. Dans le cas particulier de cette suite : $x=\dfrac{1-\beta}{\alpha-\beta}$ et $y=\dfrac{\alpha-1}{\alpha-\beta}$. Ainsi : $f_n=\dfrac{1-\beta}{\alpha-\beta}\alpha^n+\dfrac{\alpha-1}{\alpha-\beta}\beta^n$. On se trouve dans le cas où les deux premiers termes sont égaux, donc $L(f_{n+1},\ f_n)=n$
On obtient la suite : (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, …).
On constate donc que $L(1597,\ 987)=15$ puisque 987 est le terme de rang 15.

5.3. L'inégalité $f_n\geq\alpha^{n-1}$ est vérifiée pour les deux premiers termes de la suite, et devient stricte pour le terme de rang 2. Supposons la vérifiée aux rangs n et n – 1. Alors au rang suivant : $f_{n+1}\geq f_n+f_{n-1}\geq\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}=\alpha^n$. L'inégalité est toujours vérifiée. Dès qu'il y a une inégalité stricte, l'inégalité suivante est stricte aussi. Or, c'est vrai au rang 2. Donc, à partir du rang 2, toutes les inégalités sont strictes.

C. Le théorème.
1. Tous les quotients sont positifs ou nuls, puisque il s'agit de divisions euclidiennes dans l'ensemble des entiers naturels. La suite des restes étant strictement décroissante, celle des quotients est une suite d'entiers strictement positifs. (Si l'un d'entre eux, disons q_k, était nul, on aurait : $r_{k-1}=0r_k+r_{k-1}=r_{k+1}$. On aurait $r_{k-1}<r_k$ ce qui contredit la décroissante stricte de la suite des restes).
Quant à la dernière division : $r_{n-1}=q_nr_n+0$, on a $q_n\geq 2$, sinon on aurait $r_{n-1}=r_n$

2. r_n étant le dernier reste non nul, on a : $r_n\geq f_1$. Au rang précédent : $r_{n-1}\geq 2r_n\geq 2=f_2$.
Supposons que l'inégalité $r_{n-i}\geq f_{i+1}$ soit vérifiée aux rangs i et i-1. Alors : $r_{n-i-1}=q_{n-i}r_{n-i}+r_{n-i+1}\geq r_{n-i}+r_{n-i+1}\geq f_{i+1}+f_i=f_{i+2}$. La première inégalité est justifiée parce que les quotients sont strictement positifs, l'autre par l'hypothèse de récurrence. Donc, la propriété est héréditaire, jusqu'au moment où $n-i=0$.
On obtient en particulier : $b=r_1\geq f_n$
Or, on a vu que $f_n>\alpha^n$. Le logarithme à base dix d'un entier donne le nombre de chiffres de son écriture : Si un entier N s'écrit avec k chiffres, alors : $10^{k-1}\leq N<10^k$, ce qui équivaut à : $k-1\leq\log_{10}N<k$.

Or, on constate que $\log_{10}\alpha$ =0,209 à 0,001 près. Donc $\log_{10}\alpha$ > 0,2 = 1/5 et il en résulte que $\log_{10}b>\dfrac{n}{5}$. Or le nombre f_n représente *le plus petit entier b* pour lequel il faut n divisions dans l'algorithme d'Euclide. Tous les entiers précédents nécessitent moins de divisions. Donc au plus n- 1. A cause de l'inégalité, le nombre de divisions pour ces entiers est au plus $5\log_{10}b$ donc au plus 5 fois leur nombre de chiffres.