Côte d'Ivoire 1978 Terminale C : loi delta et équations fonctionnelles

Après la « loi étoile », voici la « loi delta ».

1. Le sujet

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle ouvert : $I =]-1,\ +\infty[$

A. La loi delta

On définit sur I une loi Δ de la façon suivante : $\forall x \in I,\ \ \forall y \in I,\ \ x\Delta y = x + y + x\,y$

Démontrer que la loi Δ est une loi décomposition interne dans I et qu'elle confère à cet ensemble une structure de groupe commutatif.

B. Un automorphisme et un isomorphisme

Soit h_1 l'application définie par : $\forall x \in I,\quad h_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} - 1$

1.1. Montrer que h_1 prend ses valeurs dans I.

1.2. Établir que $\forall x \in I,\ \ \forall y \in I,\ \ h_1(x)\Delta\, h_1(y) = h_1(x\Delta y)$

2.1. Étudier les variations de h_1 et en déduire que h_1 est une bijection de I sur I.

2.2. Calculer $h_1'(0)$.

2.3. Construire la courbe (Γ) représentative de h_1 dans un repère orthonormé.

3. Soit l'application t de I vers $\mathbf{R}^{*+}$ définie par : $\forall x \in I,\ \ t(x) = x + 1$

3.1. Montrer que t est un isomorphisme du groupe $(I,\ \Delta)$ sur le groupe $\mathbf{R}^{*+}$ muni de la multiplication.

3.2. Soit f_1 l'application définie par : $f_1 = t \circ h_1 \circ t^{-1}$.
Déduire de ce qui précède que f_1 est un isomorphisme du groupe $\mathbf{R}^{*+}$ muni de la multiplication sur lui-même.

3.3. Calculer $f_1(x)$ puis $f_1'(1)$.

3.4. Construire la courbe représentative (C) de f_1 dans le même repère que la courbe (Γ) et vérifier que (C) se déduit de (Γ) par une translation que l'on précisera.

C. Une équation fonctionnelle

Soit F l'ensemble des applications f de $\mathbf{R}^{*+}$ dans $\mathbf{R}^{*+}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- f est dérivable au point 1.
- $\forall x \in \mathbf{R}^{*+},\ \forall y \in \mathbf{R}^{*+},\ f(xy) = f(x)f(y)$

1. Vérifier que l'application f_1 définie au B est un élément de F.

2. Soit f un élément quelconque de F.

2.1. Etablir que $f(1) = 1$.

2.2. Soit x_0 un réel strictement positif et k un réel tel que $x_0 + k \in \mathbf{R}^{*+}$

Montrer que $f(x_0+k) - f(x_0) = f(x_0)\left[f\left(1+\dfrac{k}{x_0}\right) - f(1)\right]$

2.3. Déduire de ce qui précède que f est dérivable en tout point de $\mathbf{R}^{*+}$ et que l'on a :

$\forall x \in \mathbf{R}^{*+},\ \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{f'(1)}{x}$ où f' désigne la fonction dérivée de f.

2.4. Que se passe-t-il pour f si l'on choisit $f'(1) = 0$?

Montrer que f est strictement monotone si l'on choisit $f'(1) \neq 0$

2.5. En considérant une primitive sur $\mathbf{R}^{*+}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{f'(x)}{f(x)} - \dfrac{f'(1)}{x}$, montrer qu'il existe un réel a tel que : $\forall x \in \mathbf{R}^{*+},\ f(x) = x^a$

3. Montrer que F est l'ensemble des applications de $\mathbf{R}^{*+}$ dans $\mathbf{R}^{*+}$ du type $x \mapsto x^a$ où a décrit $\mathbf{R}$.

D. Une autre équation fonctionnelle

On désigne par H l'ensemble des applications h de I dans I vérifiant les deux conditions suivantes :

- h est dérivable au point zéro.
- $\forall x \in \mathbf{R}^{*+}, \quad \forall y \in \mathbf{R}^{*+}, \quad h(x \Delta y) = h(x) \Delta h(y)$

1. Vérifier que l'application h_1 définie au B, c'est un élément de H.

2. t étant l'application définie au B, montrer que si $h \in H$, alors l'application $t \circ h \circ t^{-1}$ appartient à F.

3. Montrer que H est l'ensemble des applications de I dans I du type $x \mapsto h_a(x) = (x+1)^a - 1$ où a décrit $\mathbf{R}$.

4. Pour tout réel a et tout élément q de I, on note $q^{[a]}$ l'élément $(q+1)^a - 1$ de I. C'est-à-dire que $q^{[a]} = h_a(q)$ selon la notation ci-dessus.

Etablir que :

4.1. $\forall x \in I, \quad \forall y \in I, \quad \forall a \in \mathbf{R}, \quad x^{[a]} \Delta y^{[a]} = (x \Delta y)^{[a]}$

4.2. $\forall x \in I, \quad \forall a \in \mathbf{R}, \quad \forall b \in \mathbf{R} \quad x^{[a]} \Delta x^{[b]} = x^{[a+b]}$

4.3. $\forall x \in I, \quad \forall a \in \mathbf{R}, \quad \forall b \in \mathbf{R} \quad \left(x^{[a]}\right)^{[b]} = (x)^{[ab]}$

2. Eléments de correction

A. La loi delta

On définit sur I une loi Δ de la façon suivante : $\forall x \in I,\ \ \forall y \in I,\ \ x\Delta y = x + y + x\,y$

On note que : $x\Delta y = x + y + x\,y = (x+1)(y+1) - 1$. *L'énoncé original n'y faisait aucune allusion, il appartenait aux candidats de s'en rendre compte eux-mêmes - ou non - . Cette relation sera éventuellement utile à plusieurs reprises dans la résolution du problème.*

1. $x \in I,\ \ y \in I \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x+1>0 & \text{et} & x+1>0 \\ y+1>0 & & y+1>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x+1)(y+1) > 0$

Par conséquent : $\forall x \in I,\ \ \forall y \in I,\ \ x\Delta y = (x+1)(y+1) - 1 > -1$. Ainsi : $\forall x \in I,\ \ \forall y \in I,\ \ x\Delta y \in I$: la loi delta est une loi de composition interne dans I.

2.

- La loi delta est commutative, puisque l'expression de $x\Delta y$ en fonction de x et de y est symétrique en x et en y.
- $(x\Delta y)\Delta z = (x + y + x\,y)\Delta z = (x + y + x\,y) + z + (x + y + x\,y)z = x + y + z + x\,y + y\,z + z\,x + x\,y\,z$ tandis que : $x\Delta(y\Delta z) = x\Delta(y + z + y\,z) = x + (y + z + y\,z) + x(y + z + y\,z) = x + y + z + x\,y + y\,z + z\,x + x\,y\,z$. Les deux expressions développées sont identiques : $\forall x \in I,\ \ \forall y \in I,\ \ \forall y \in I,\ (x\Delta y)\Delta z = x\Delta(y\Delta z)$, la loi delta est associative.
- 0 est élément neutre : pour tout x de I, $0\Delta x = x\Delta 0 = x$.
- La recherche d'un éventuel symétrique y d'un réel x de I équivaut à la résolution, dans I, de l'équation d'inconnue y et de paramètre x : $x + y + x\,y = 0$. Cette équation a une solution réelle : $y = \dfrac{-x}{x+1} = -1 + \dfrac{1}{x+1}$. Dès lors que x appartient à I, $\dfrac{1}{x+1} > 0$ et $y > -1$. Cette solution appartient à I. Tout élément x de I a dans I un symétrique pour la loi delta, le réel $x' \underset{gilbertjulia\,2018}{=} -1 + \dfrac{1}{x+1}$

La loi Δ est une loi décomposition interne dans I et qui confère à cet ensemble une structure de groupe commutatif.

B. Un automorphisme et un isomorphisme

Soit h_1 l'application définie par : $\forall x \in I,\quad h_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} - 1$

1.1. h_1 prend ses valeurs dans I car $\forall x \in I,\ \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 > -1$

1.2. En utilisant l'expression $x\Delta y = (x+1)(y+1) - 1$ vue à propos de la loi delta

$\forall x \in I,\ \ \forall y \in I\ \ h_1(x)\Delta h_1(y) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+y}}\right) - 1 \underset{gjulia}{=} \dfrac{1}{\sqrt{1 + x + y + x\,y}} - 1 = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x\Delta y}} - 1$.

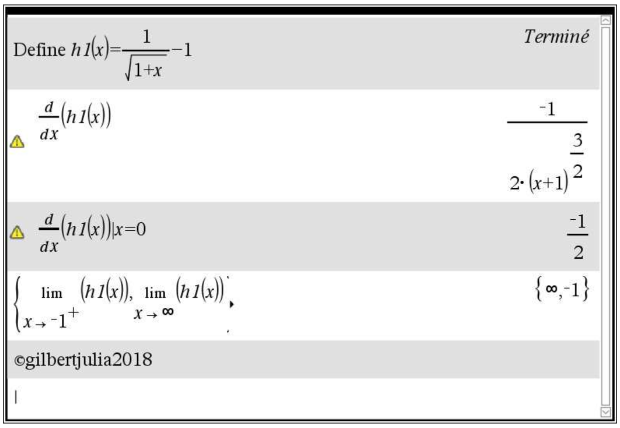
Ainsi : $\forall x \in I,\ \ \forall y \in I\ \ h_1(x)\Delta h_1(y) = h_1(x\Delta\, y)$. La fonction h_1 conserve la loi delta.

h_1 est dérivable sur I, elle y est donc *a fortiori* continue.

Son nombre dérivé en zéro est $-\dfrac{1}{2}$

Sa fonction dérivée est strictement négative sur I. La fonction h_1 en tant que fonction continue et strictement monotone sur I réalise une bijection de I sur l'intervalle image. L'examen des limites aux bornes de I montre que cet intervalle image est I lui-même.

L'application h_1 de I vers I est un automorphisme du groupe $(I,\ \Delta)$ dérivable sur I (c'est donc un élément de l'ensemble H de la partie D)



3. Soit l'application t de I vers $\mathbf{R}^{*+}$ définie par : $\forall x\in I,\ \ t(x)=x+1$

3.1. t est une translation et à ce titre elle réalise une bijection de I vers l'intervalle image de I, en l'occurrence l'intervalle $\mathbf{R}^{*+}$.

De plus : $\forall x\in I,\ \ \forall y\in I\ \ t(x\Delta y)=((x+1)(y+1)-1)+1 \underset{gjulia}{=} (x+1)(y+1)=(t(x)).(t(y))$.

L'application t transforme la loi delta définie sur I en la multiplication des réels strictement positifs., c'est un morphisme.

L'application t est un isomorphisme du groupe $(I,\ \Delta)$ sur le groupe $\mathbf{R}^{*+}$ muni de la multiplication.

3.2. Soit f_1 l'application définie par : $f_1=t\circ h_1\circ t^{-1}$

t^{-1} est un isomorphisme de $(\mathbf{R}^{*+},\ .)$ sur $(I,\ \Delta)$, h_1 est un automorphisme de $(I,\ \Delta)$ et t un isomorphisme de $(I,\ \Delta)$ sur $(\mathbf{R}^{*+},\ .)$. La composée f_1 est une bijection de $(\mathbf{R}^{*+},\ .)$ sur lui-même en tant que composée de bijections et un isomorphisme de $(\mathbf{R}^{*+},\ .)$ vers lui-même en tant que composée d'isomorphismes.

f_1 est un automorphisme du groupe $(\mathbf{R}^{*+},\ .)$.

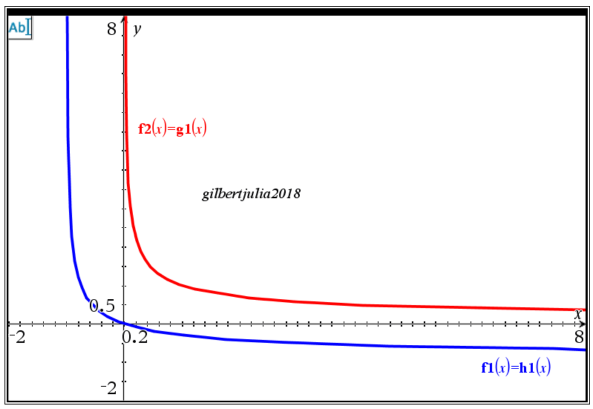
3.2. Pour tout x de $\mathbf{R}^{*+}$: $f_1(x)=t\circ h_1\circ t^{-1}(x)=t\circ h_1(x-1)\underset{gj}{=} t\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

La fonction f_1 est définie par : $f_1(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et son nombre dérivé en 1 est le même que celui de h_1 en zéro, en l'occurrence $-\dfrac{1}{2}$

f_1 est élément de l'ensemble F de la partie C car c'est un automorphisme du groupe $(\mathbf{R}^{*+},\ .)$ dérivable sur l'intervalle $\mathbf{R}^{*+}$, en particulier en 1.

$M(x,\ y)\in(\Gamma)\Leftrightarrow y+1=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\underset{gj}{\Leftrightarrow} M'(x+1,\ y+1)\in(C)$

Un point est sur (Γ) si et seulement si son translaté par la translation de vecteur de coordonnées $(1,1)$ appartient à (C). (C) est l'image de (Γ) par cette translation.



C. Une équation fonctionnelle

On cherche dans cette partie quels sont les morphismes du groupe $(\mathbf{R}^{*+}, .)$ qui sont dérivables au point 1.

1. Voir ci-dessus.

2. Soit *f* un élément quelconque de F.

2.1. $f(1)-f(1\times 1)=f(1)-(f(1))^2 \underset{gjulia}{=} f(1).(1-f(1))=0$.

Puisque $f(1)\neq 0$ (car élément de $\mathbf{R}^{*+}$), nécessairement $f(1)-1=0$. Le réel 1 est point fixe de *f*.

2.2. Soit x_0 un réel strictement positif et k un réel tel que $x_0+k\in\mathbf{R}^{*+}$:

$$f(x_0+k)-f(x_0)=f\left(x_0\times\left(1+\frac{k}{x_0}\right)\right)-f(x_0)\underset{gj}{=} f(x_0)\times f\left(1+\frac{k}{x_0}\right)-f(x_0)=f(x_0)\left[f\left(1+\frac{k}{x_0}\right)-1\right]$$

Puisque 1 est point fixe de *f* : $f(x_0+k)-f(x_0)\underset{gjulia}{=} f(x_0)\left[f\left(1+\frac{k}{x_0}\right)-f(1)\right]$

2.3. On en déduit que le taux de variation entre x_0 et x_0+k est :

$$\frac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k}=f(x_0)\times\left[\frac{f\left(1+\frac{k}{x_0}\right)-f(1)}{k}\right]$$

Par définition du nombre dérivé en 1 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$. En posant $h\,x_0=k$, on obtient :

$$\lim_{k\to 0}\frac{f\left(1+\frac{k}{x_0}\right)-f(1)}{k}=\frac{f'(1)}{x_0}\text{ puis }\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k}=f(x_0)\times\left(\frac{f'(1)}{x_0}\right).$$

La limite quand k tend vers zéro du taux de variation entre x_0 et x_0+k existe et est finie, la fonction *f* est dérivable en x_0 et son nombre dérivé en ce point est $f'(x_0)=f(x_0)\times\frac{f'(1)}{x_0}$

f est dérivable en tout point de $\mathbf{R}^{*+}$ et sa fonction dérivée *f'* est définie par : $f'(x)\underset{gilbertjulia2018}{=} f(x)\times\frac{f'(1)}{x}$.

Ainsi, $\forall x\in\mathbf{R}^{*+},\ \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{f'(1)}{x}$

2.4. Si l'on choisit $f'(1)=0$, la fonction *f'* est la fonction nulle, *f* est une fonction constante et sa valeur en 1 indique qu'il s'agit de la fonction égale à 1 pour tout x de $\mathbf{R}^{*+}$.

Si l'on choisit $f'(1)\neq 0$, *f'* est du signe de $f'(1)$ en tout point de $\mathbf{R}^{*+}$ puisque x et $f(x)$ sont tous deux strictement positifs sur $\mathbf{R}^{*+}$. La fonction *f* est strictement monotone, strictement croissante si $f'(1)>0$ et strictement décroissante si $f'(1)<0$.

2.5. Une primitive sur $\mathbf{R}^{*+}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{f'(x)}{f(x)} - \dfrac{f'(1)}{x}$ est la fonction $x \mapsto \ln(f(x)) - f'(1)\ln x$. Il existe une constante C telle que pour tout x de $\mathbf{R}^{*+}$: $\ln(f(x)) = f'(1)\ln x + C$. La valeur que prend *f* en 1 étant 1, on en déduit que nécessairement $C = 0$. En conséquence pour tout x de $\mathbf{R}^{*+}$: $\ln(f(x)) = f'(1)\ln x$ puis $f(x) = x^{f'(1)}$. Il existe un réel a tel que : $\forall x \in \mathbf{R}^{*+},\ f(x) = x^a$, ce réel coïncide avec le nombre dérivé de *f* au point 1.

3. Il découle de ci-dessus que l'ensemble F est inclus dans l'ensemble des fonctions puissances réelles définies sur $\mathbf{R}^{*+}$.
Réciproquement, si *f* est une fonction puissance réelle : $x \mapsto f(x) = x^a$, cette fonction est dérivable sur $\mathbf{R}^{*+}$, sa dérivée est la fonction $x \mapsto f'(x) = a\,x^{a-1}$ et en particulier elle est dérivable au point 1. De plus, en vertu des propriétés des fonctions puissances, pour tout couple de réels strictement positifs (x, y) : $(x.y)^a = x^a . y^a$, cette fonction est un homomorphisme du groupe $(\mathbf{R}^{*+}, .)$, elle appartient à F.

L'ensemble F est exactement l'ensemble des fonctions puissances réelles définies sur $\mathbf{R}^{*+}$.

D. Une autre équation fonctionnelle

On désigne par H l'ensemble des applications h de I dans I vérifiant les deux conditions suivantes :

- h est dérivable au point zéro.
- $\forall x \in \mathbf{R}^{*+},\ \forall y \in \mathbf{R}^{*+},\ h(x\Delta y) = h(x)\Delta h(y)$

1. Voir ci-dessus.

2. t étant l'application définie au B, si $h \in H$, alors l'application $t \circ h \circ t^{-1}$ est définie sur $\mathbf{R}^{*+}$ et prend ses valeurs dans $\mathbf{R}^{*+}$. C'est un morphisme du groupe $(\mathbf{R}^{*+}, .)$ car composée de morphismes de groupes et elle est dérivable sur $\mathbf{R}^{*+}$, en particulier dérivable en 1 comme composée de fonctions dérivables (en ce qui concerne le point 1, t^{-1} l'est sur $\mathbf{R}^{*+}$ donc en 1, h est supposée dérivable en $0 = t^{-1}(1)$ puis t l'est en $0 = h \circ t^{-1}(1) = h(0)$: la composée est dérivable en 1)
Cette application appartient à F.
L'image de H par l'application $h \in H \mapsto t \circ h \circ t^{-1}$ est incluse dans F.

3. Réciproquement, si *f* appartient à F, alors il est facile de vérifier, de façon analogue à la question **2**, que $h = t^{-1} \circ f \circ t$ est élément de H.
Or, en raison des propriétés d'associativité de la loi rond, $f = t \circ (t^{-1} \circ f \circ t) \circ t^{-1}$. L'ensemble F est inclus dans l'image de H par l'application $h \in H \mapsto t \circ h \circ t^{-1}$.
Il y a égalité entre les deux ensembles.
L'application $h \in H \mapsto f = t \circ h \circ t^{-1}$ est une bijection de H sur F, bijection dont $f \mapsto t^{-1} \circ f \circ t$ est la bijection réciproque.

Une conséquence en est que H est entièrement décrit par la fonction $t^{-1} \circ f \circ t$ lorsque *f* décrit F.

Une fonction de ce type est définie ainsi : $x \in I \xrightarrow{t} x+1 \xrightarrow{f} (x+1)^a \xrightarrow{t^{-1}} (x+1)^a - 1 = t^{-1} \circ f \circ t(x)$

H est l'ensemble des fonctions de *I* dans *I* du type $x \mapsto h_a(x) = (x+1)^a - 1$ où a décrit **R**.

4. Pour tout réel a et tout élément q de *I*, on note $q^{[a]}$ l'élément $(q+1)^a - 1$ de *I*. C'est-à-dire que $q^{[a]} = h_a(q)$ selon la notation ci-dessus.

4.1. $\forall x \in I,\ \forall y \in I,\ \forall a \in \mathbf{R},\ x^{[a]} \Delta\, y^{[a]} = h_a(x) \Delta\, h_a(y) \underset{gilbertjulia2018}{=} h_a(x\Delta y) = (x\Delta y)^{[a]}$ car h est un morphisme de (I, Δ)

4.2. $\forall x \in I,\ \forall a \in \mathbf{R},\ \forall b \in \mathbf{R}\ h_a(x)\Delta h_b(x) = (x+1)^a(x+1)^b - 1 = (x+1)^{a+b} - 1 = h_{a+b}(x)$ en utilisant l'expression de la loi delta donnée au début de la correction et les propriétés d'une fonction puissance.
Ce qui exprime que $\forall x \in I,\ \forall a \in \mathbf{R},\ \forall b \in \mathbf{R}\ x^{[a]} \Delta\, x^{[b]} = x^{[a+b]}$

4.3. On note, en désignant par f_a la fonction puissance d'exposant a que : $\underset{gjulia}{} \begin{cases} h_a = t^{-1} \circ f_a \circ t \\ h_b = t^{-1} \circ f_b \circ t \end{cases}$, donc si a et b sont deux réels donnés : $h_b \circ h_a = (t^{-1} \circ f_b \circ t) \circ (t^{-1} \circ f_a \circ t) = t^{-1} \circ f_b \circ f_a \circ t = t^{-1} \circ f_{b\,a} \circ t = h_{b\,a}$ puisque f_a et f_b sont deux fonctions $_{gj}$ puissances réelles.
Ce qui exprime que : $\forall x \in I,\ \forall a \in \mathbf{R},\ \forall b \in \mathbf{R}\ \left(x^{[a]}\right)^{[b]} = (x)^{[a\,b]}$