Courbes isogones d'une parabole (cas général)

Sujet analogue au précédent mais cette fois, on envisage la parabole d'équation : $y=\dfrac{x^2}{2p}$ *où p est un réel strictement positif. Il y aura un paramètre de plus …*

On y cherche, comme dans l'exemple, l'ensemble des points du plan d'où l'on peut mener deux tangentes à la parabole déterminant un angle géométrique fixé. Dans la question ***I.2****, on cherchera l'ensemble des points du plan d'où l'on peut mener deux tangentes à la parabole perpendiculaires et ensuite on s'attaquera à l'ensemble des points du plan d'où l'on peut mener deux tangentes à la parabole déterminant un angle géométrique de mesure* θ *fixée.*

Les candidats au CAPES peuvent se contenter de traiter ***I*** *questions* ***1*** *et* ***2*** *puis la partie* ***III « complément »*** *qui leur est destinée, questions toutes du niveau actuel du concours. Evidemment, les questions les plus intéressantes de ce sujet, ce sont les autres. Disons que ces autres sont destinées aux candidats curieux souhaitant parfaire une certaine culture mathématique. Curiosité personnelle profondément enrichissante mais désormais très au-delà du seuil d'inutilité au regard du niveau des savoirs que les futurs enseignants auront à transmettre.*

Le sujet

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. p est un nombre réel strictement positif.

On désigne par (P) la parabole d'équation cartésienne $y=\dfrac{x^2}{2p}$.

(On vérifiera que cette parabole a pour foyer le point $F\left(0\,;\dfrac{p}{2}\right)$ et pour directrice la droite d'équation cartésienne $y=-\dfrac{p}{2}$).

I. Point de vue analytique

1. Soit $I\,(a\,;b)$ un point du plan. Pour tout nombre réel k, on désigne par D_k la droite passant par I et de coefficient directeur k.

1.1. Discuter suivant les valeurs de a, b et k l'existence et le nombre de points d'intersection entre D_k et (P).

1.2. Etablir en particulier que, lorsque I est sous la parabole, il existe deux droites issues de I qui sont tangentes à la parabole, de coefficients directeurs respectifs : $k_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2-2pb}}{p}$ et $k_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2-2pb}}{p}$.

2. Déterminer quel est l'ensemble $\Gamma_{\pi/2}$ des points I du plan par lesquels on peut mener deux tangentes à la parabole perpendiculaires. (Cet ensemble s'appelle la courbe « orthoptique » de la parabole).

3. On suppose que l'on peut mener par I deux tangentes distinctes non perpendiculaires. On désigne alors par φ la mesure en radians de l'angle géométrique de ces deux droites. Montrer que : $\tan\varphi = \dfrac{2\sqrt{a^2-2bp}}{|2b+p|}$

4. Soit θ un réel tel que $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$. On note : $t=\tan\theta$. On désigne par Γ_θ l'ensemble des points I du plan par lesquels on peut mener deux tangentes à la parabole dont l'angle géométrique est égal à θ.

Montrer que Γ_θ est une hyperbole dont on précisera le centre, en fonction de p et de $t=\tan\theta$.

5. Montrer que le foyer $F\left(0\,;\dfrac{p}{2}\right)$ de la parabole est aussi un foyer de Γ_θ et que la directrice de la parabole est aussi une directrice de Γ_θ.

II. Point de vue géométrique

Retrouver les résultats du « point de vue analytique » en exploitant les propriétés géométriques des coniques.

On rappelle notamment :

- Une conique de foyer F directrice (D) et excentricité e est l'ensemble des points M du plan tels que $\dfrac{MF}{MH}=e$ où H est le projeté orthogonal de M sur (D). En particulier, la parabole de foyer F et directrice (D) est l'ensemble des points équidistants de F et de (D).
- Propriétés tangentielles d'une parabole (P) : la tangente à (P) en un point M est la médiatrice du segment [HF].

III. Complément : propriétés des points de la directrice

On suppose dans cette partie que I est un point de la directrice de la parabole. On note a son abscisse, de sorte que ses coordonnées sont : $I\left(a\,;-\dfrac{p}{2}\right)$.

D'après la partie **I** , on peut mener de I deux tangentes à la parabole, de coefficients directeurs respectifs $k_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2+p^2}}{p}$ et $k_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2+p^2}}{p}$ et ces deux droites sont perpendiculaires.

1. On note M_1 et M_2 les points de contact respectifs des deux tangentes issues de I avec la parabole.
Expliciter les coordonnées de ces points.

2. Montrer que (IF) et (M_1M_2) sont perpendiculaires.

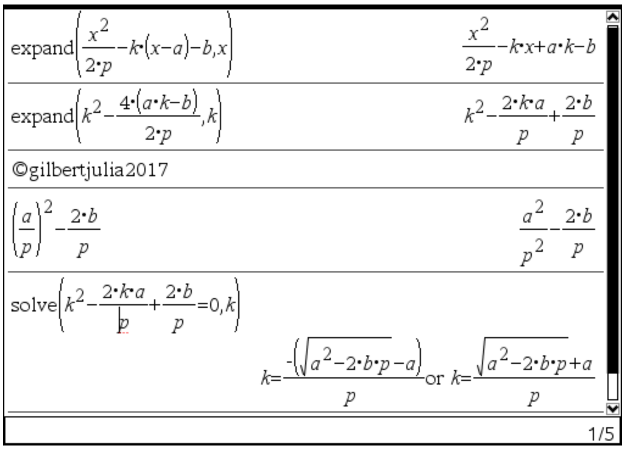
3.1. Montrer que (M_1M_2) passe par F.
3.2. Montrer que toute droite passant par F et distincte de (Fy) coupe la parabole en deux points où les tangentes à la parabole sont perpendiculaires.

Eléments de correction

1. La droite D_k a pour équation cartésienne l'équation : $y = k(x-a)+b$.

Un point $M\ (x\,;\,y)$ est point d'intersection de D_k et (P) si et seulement si son abscisse x est solution de l'équation au second degré :

$\dfrac{x^2}{2p} - k\,x + a\,k - b = 0$. **(1)**



Cette équation a pour discriminant : $\Delta_x = k^2 - 2\dfrac{k\,a}{p} + 2\dfrac{b}{p}$.

Ce discriminant est une expression du second degré en k dont le discriminant réduit est : $\Delta_k = \dfrac{a^2}{p^2} - \dfrac{2b}{p} = \dfrac{p}{2}\left(\dfrac{a^2}{2p} - b\right)$

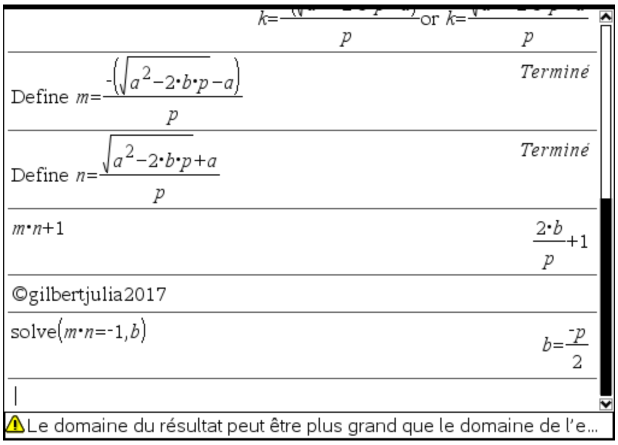
- Si $\dfrac{a^2}{2p} - b < 0$ (I au dessus de la parabole) alors $\Delta_k < 0$. Δ_x est strictement positif quelle que soit la valeur de k. L'équation **(1)** a toujours deux solutions distinctes et la droite D_k coupe toujours la parabole en deux points distincts.
- Si $\dfrac{a^2}{2p} - b = 0$ (I sur la parabole) alors $\Delta_k = 0$. Δ_x est positif ou nul. Il est nul lorsque $k = \dfrac{a}{p}$ et dans ce cas **(1)** a une solution double (égale à a). Le point I est point de contact et la droite $\Delta_{a/p}$ est la tangente en I à la parabole. Pour toutes les autres valeurs de k, **(1)** admet deux solutions distinctes, a étant l'une des deux solutions ; D_k coupe la parabole en deux points distincts dont un est le point I.
- Si $\dfrac{a^2}{2p} - b < 0$ (I au dessous de la parabole) alors $\Delta_k > 0$. L'équation $k^2 - 2\dfrac{a}{p}k + 2\dfrac{b}{p} = 0$ admet deux solutions distinctes : $k_1 = \dfrac{a - \sqrt{a^2 - 2pb}}{p}$ et $k_2 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 2pb}}{p}$. Pour ces deux valeurs particulières de k, $\Delta_x = 0$: **(1)** admet une solution double, D_k est la tangente en I à la parabole. Lorsque $k_1 < k < k_2$, $\Delta_x < 0$: **(1)** n'admet pas de solution, D_k ne coupe la parabole en aucun point. Lorsque $k < k_1$ ou $k > k_2$, $\Delta_x > 0$: **(1)** admet deux solutions distinctes, D_k coupe la parabole en deux points distincts.

1.2. En résumé, lorsque I est strictement extérieur à la parabole, il existe deux droites issues de I qui sont tangentes à la parabole, de coefficients directeurs respectifs $k_1 = \dfrac{a - \sqrt{a^2 - 2pb}}{p}$ et $k_2 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 2pb}}{p}$.

2. On suppose que I est extérieur à la parabole. Il existe alors deux droites issues de I qui sont tangentes à la parabole, de coefficients directeurs respectifs $k_1 = \dfrac{a-\sqrt{a^2-2pb}}{p}$ et $k_2 = \dfrac{a+\sqrt{a^2-2pb}}{p}$.

Ces deux droites sont perpendiculaires si et seulement si $k_1 k_2 = -1$

Or $k_1 k_2 = 2\dfrac{b}{p}$ (on peut effectuer le calcul ou remarquer qu'il s'agit du produit des racines du polynôme en k : $k^2 - 2\dfrac{a}{p}k + 2\dfrac{b}{p}$)



Ainsi : $k_1 k_2 = -1 \underset{gj}{\Leftrightarrow} b = -\dfrac{p}{2}$.

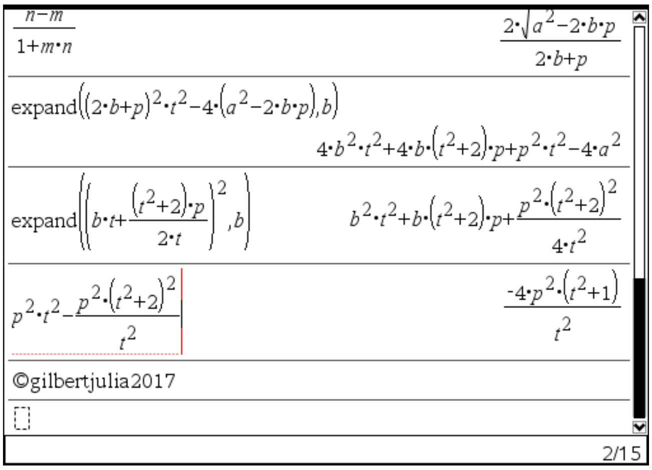
Il a été vu que (P) avait pour directrice précisément la droite d'équation cartésienne $y = -\dfrac{p}{2}$.

Les tangentes issues de I sont des droites perpendiculaires si et seulement si I appartient à la directrice de la parabole.

3. Il existe deux tangentes issues de I d'où l'on peut mener deux tangentes non perpendiculaires à condition que I soit situé à l'extérieur de la parabole et qu'il ne soit pas sur la directrice.

Sous ces hypothèses, l'angle géométrique de ces deux droites a pour tangente :

$$\tan\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| \underset{gjulia}{=} \frac{2\sqrt{a^2-2bp}}{|2b+p|}$$



4. L'égalité de deux angles géométriques est équivalente à celle de leurs tangentes.

Si on pose $t = \tan\theta$: $\varphi = \theta \Leftrightarrow \dfrac{2\sqrt{a^2-2bp}}{|2b+p|} = t$.

Cette égalité entre réels strictement positifs est équivalente à l'égalité de leurs carrés.

$$\varphi = \theta \underset{gjulia}{\Leftrightarrow} \left(\frac{2\sqrt{a^2-2bp}}{|2b+p|}\right)^2 = t^2$$

On obtient :

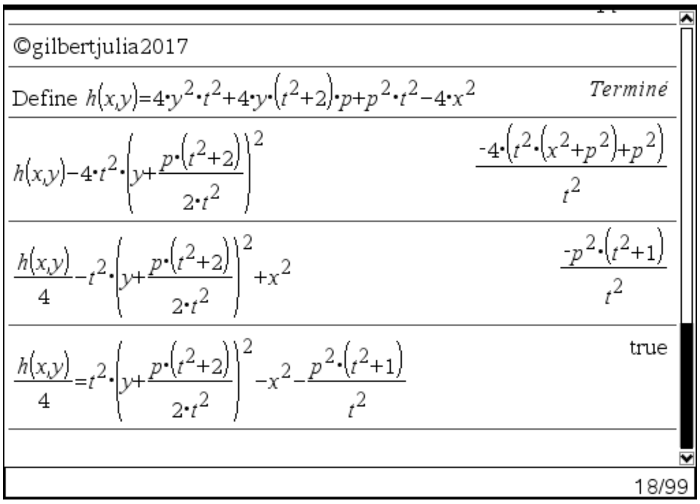
$$\varphi = \theta \underset{gjulia}{\Leftrightarrow} 4t^2b^2 + 4p(t^2+2)b + p^2t^2 - 4a^2 = 0$$

L'ensemble Γ_θ a ainsi pour équation cartésienne : $4t^2y^2 + 4p(t^2+2)y + p^2t^2 - 4x^2 = 0$.

En tant qu'équation du second degré en x et en y il s'agit là d'une conique.

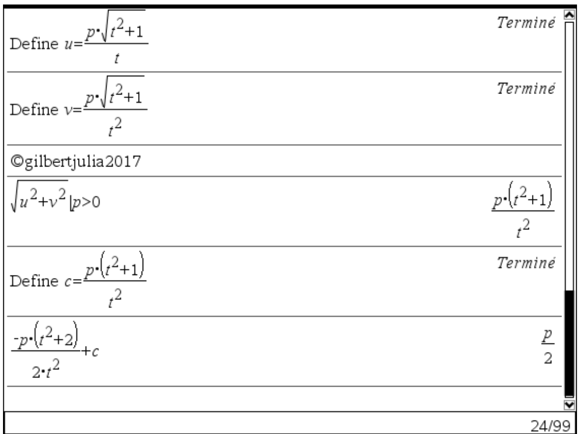
Cette équation est équivalente à l'équation : $t^2\left(y+\dfrac{p(t^2+2)}{2t^2}\right)^2 - x^2 = \dfrac{p^2(t^2+1)}{t^2}$

On reconnaît l'équation d'une hyperbole dont le centre est le point $\Omega\left(0\,;\,-\dfrac{p(t^2+2)}{2t^2}\right)$ et dont l'axe focal est l'axe Ωy.



L'équation réduite de Γ_θ est d'ailleurs : $\dfrac{x^2}{\dfrac{p^2(t^2+1)}{t^2}} - \dfrac{\left(y+\dfrac{p(t^2+2)}{2t^2}\right)^2}{\dfrac{p^2(t^2+1)}{t^4}} = -1$, équation de la forme $\dfrac{x^2}{u^2}-\dfrac{Y^2}{v^2}=-1$ avec successivement : $Y = y+\dfrac{p(t^2+2)}{2t^2}$; $u=\dfrac{p\sqrt{(t^2+1)}}{t}$; $v=\dfrac{p\sqrt{(t^2+1)}}{t^2}$.

5. Le paramètre focal de cette hyperbole est : $c=\sqrt{u^2+v^2}=\dfrac{p(t^2+1)}{t^2}$



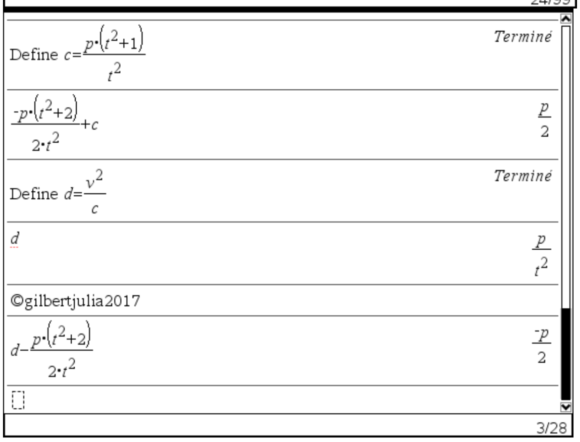
Les ordonnées des foyers de Γ_θ sont dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$: $-\dfrac{p(t^2+2)}{2t^2} \pm \dfrac{p(t^2+1)}{t^2}$. L'un des foyers a pour ordonnée : $-\dfrac{p(t^2+2)}{2t^2}+\dfrac{p(t^2+1)}{t^2}=\dfrac{p}{2}$, il s'agit du foyer F de la parabole.

Le paramètre associé aux directrices est : $d=\dfrac{v^2}{c}=\dfrac{p}{t^2}$.

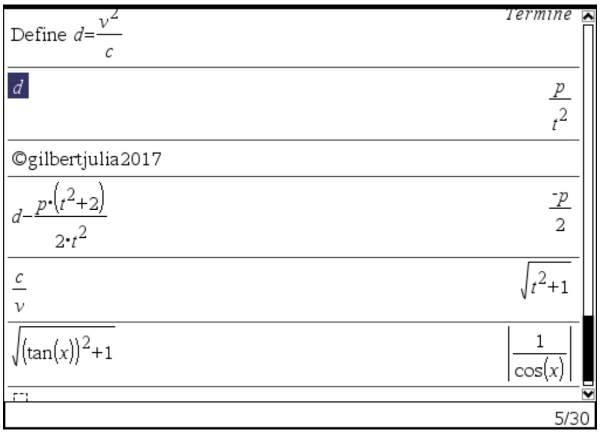
Les équations des directrices de Γ_θ sont dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$: $-\dfrac{p(t^2+2)}{2t^2}\pm\dfrac{p}{t^2}$.

L'une des directrices a pour équation : $y=-\dfrac{p(t^2+2)}{2t^2}+\dfrac{p}{t^2}=-\dfrac{p}{2}$.

Il s'agit de la directrice de la parabole.



L'excentricité de cette hyperbole est :
$\dfrac{c}{v}=\sqrt{\tan^2\theta+1}=\dfrac{1}{\cos\theta}$.

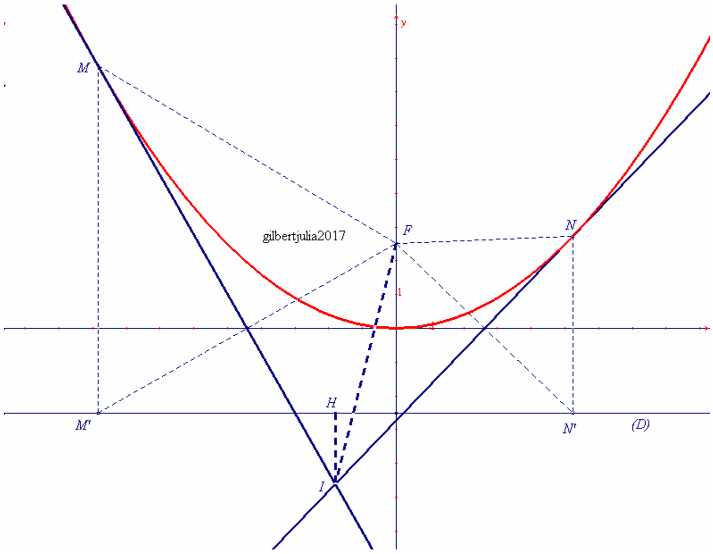


En conclusion générale, les courbes isogones de la parabole autres que l'orthoptique sont des hyperboles dont un foyer et une directrice sont ceux de la parabole.

Point de vue géométrique

On considère le parabole (*P*), son foyer *F* et sa directrice (*D*).

Soit *I* un point extérieur à la parabole et non situé sur la directrice. Soient *M* et *N* les points de contact des tangentes issues de *I* avec la parabole. On note *M'*, *N'* et *H* les projetés orthogonaux respectifs de *M*, *N* et *I* sur (*D*).



Compte tenu des propriétés usuelles des paraboles :
(*P*) est le lieu des points équidistants de *F* et de (*D*) : $MF=MM'$ et $NF=NN'$
La tangente en un point quelconque *S* de la parabole est médiatrice du segment [*FS'*] où *S'* est le projeté orthogonal de *S* sur la directrice.

Les tangentes (*IM*) et (*IN*) en *M* et en *N* à la parabole sont médiatrices des segments [*MF*] et [*NF*].
Les points *M'* et *N'* sont les symétriques de *F* par rapport respectivement à (*IM*) et (*IN*).

Il en résulte d'une part que : $IM'=IN'=IF$ et d'autre part que l'angle $M'\hat{I}N'$ est double de l'angle géométrique, que l'on notera désormais φ, des deux droites (*IM*) et (*IN*) : $M'\hat{I}N'=2\varphi$

Ensemble $\Gamma_{\pi/2}$ des points *I* du plan par lesquels on peut mener deux tangentes à la parabole perpendiculaires :

Si (*IM*) et (*IN*) sont perpendiculaires, alors : $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ et $M'\hat{I}N'=\pi$. Les points *M'*, *I*, *N'* sont alignés et puisque *M'* et *N'* sont deux points distincts de la directrice (*D*) de (*P*), *I* appartient à (*D*).

Réciproquement, si *I* appartient à (*D*), *M'*, *I*, *N'* sont alignés dans cet ordre. [*M'N'*] est un diamètre du cercle de centre *I* passant par *F*, *M'* et *N'*. Les droites (*FM'*) et (*FN'*) sont perpendiculaires et les médiatrices (*IM*) de [*FM'*] et (*IN*) de [*FN'*] le sont aussi. *I* appartient à $\Gamma_{\pi/2}$;
Ainsi : $\Gamma_{\pi/2}=(D)$.

Ensemble Γ_θ des points *I* du plan par lesquels on peut mener deux tangentes à la parabole dont l'angle géométrique est égal à θ lorsque $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$:

Si *I* est un point de Γ_θ, *I* n'appartient pas à (*D*) et est distinct de son projeté orthogonal *H* sur (*D*).

La droite (*IH*) étant hauteur issue de *I* du triangle isocèle *M'IN'* est en même temps bissectrice intérieure de l'angle $M'\hat{I}N'$: $H\hat{I}M' = H\hat{I}N' = \theta$

Le triangle *HIM'* étant rectangle en *H* : $\dfrac{HI}{IM'} = \cos H\hat{I}M' = \cos\theta$.

Puisque $IF = IM'$: $\dfrac{IF}{IH} = \dfrac{1}{\cos\theta}$. Le point *F* appartient à la conique de foyer *F*, de directrice (*D*) et d'excentricité $e = \dfrac{1}{\cos\theta}$.

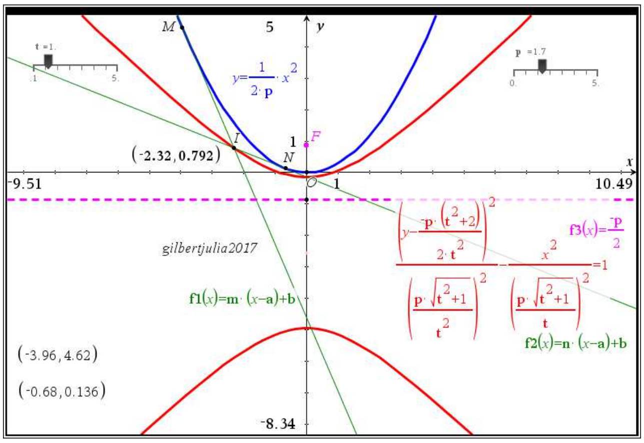
Réciproquement, si *I* appartient à cette conique : $\dfrac{IM'}{IH} = \dfrac{IF}{IH} = \dfrac{1}{\cos\theta}$. Il en résulte que : $\cos H\hat{I}M' = \dfrac{HI}{IM'} = \cos\theta$.

Un angle géométrique étant caractérisé par son cosinus : $H\hat{I}M' = \theta$. L'angle géométrique des deux droites (*IM*) et (*IN*) est égal à θ. *I* est un point de Γ_θ.

L'ensemble Γ_θ est la conique de foyer *F*, de directrice (*D*) et d'excentricité $e = \dfrac{1}{\cos\theta}$. Il s'agit d'une hyperbole puisque l'excentricité est strictement supérieure à 1.

Les résultats de la première partie sont retrouvés.

Deux curseurs représentent les paramètres *p* et $t = \tan\theta$ que l'on pourra faire varier à la demande.



En bleu, la parabole (*P*). En magenta son foyer et sa directrice. En rouge, l'ensemble Γ_θ.

I est un point de cet ensemble. En vert, les tangentes issues de *I*.

Les coordonnées des points de contact *M* et *N* des tangentes avec la parabole sont en bas de l'écran à gauche.

Lorsque *I* est sur une branche de Γ_θ, l'angle $M\hat{I}N$ est aigu ($M\hat{I}N = \theta$). Sur l'autre, il est obtus ($M\hat{I}N = \pi - \theta$).

III. Complément : propriétés des points de la directrice

On suppose dans cette partie que I est un point de la directrice de la parabole. On note a son abscisse, de sorte que ses coordonnées sont : $I\left(a\,;-\dfrac{p}{2}\right)$.

D'après la partie **I**, on peut mener de I deux tangentes à la parabole, de coefficients directeurs respectifs $k_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2+p^2}}{p}$ et $k_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2+p^2}}{p}$ et ces deux droites sont perpendiculaires.

1. On note D_1 et D_2 les deux tangentes issues de I et M_1 et M_2 leurs points de contact respectifs avec la parabole.
L'abscisse x_1 du point M_1 est solution de l'équation au second degré :
$\dfrac{x^2}{2p}-\dfrac{a-\sqrt{a^2+p^2}}{p}x+a\dfrac{a-\sqrt{a^2+p^2}}{p}+\dfrac{p}{2}=0$, laquelle a une solution double.

Ainsi : $x_1=\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2+p^2}}{p}\right)/\left(\dfrac{1}{p}\right)=a-\sqrt{a^2+p^2}$.

Le point M_1 a pour coordonnées : $M_1\left(a-\sqrt{a^2+p^2}\;;\;\dfrac{\left(a-\sqrt{a^2+p^2}\right)^2}{2p}\right)$

De même : $M_2\left(a+\sqrt{a^2+p^2}\;;\;\dfrac{\left(a+\sqrt{a^2+p^2}\right)^2}{2p}\right)$

2. De sorte que le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{M_1M_2}\left(2\sqrt{a^2+p^2}\;;\;\dfrac{2a\sqrt{a^2+p^2}}{p}\right)$

Le vecteur $\overrightarrow{IF}$ ayant pour coordonnées : $(-a\,;\,p)$, on obtient que $\overrightarrow{IF}.\overrightarrow{M_1M_2}=0$
Les droites (IF) et (M_1M_2) sont perpendiculaires.

3. Un point $M\,(x\,;y)$ appartient à (M_1M_2) si et seulement si $\begin{vmatrix} x-\left(a+\sqrt{a^2+p^2}\right) & \sqrt{a^2+p^2} \\ y-\dfrac{\left(a+\sqrt{a^2+p^2}\right)^2}{2p} & \dfrac{\sqrt{a^2+p^2}}{p}\end{vmatrix}=0$

soit si et seulement si : $\dfrac{\sqrt{a^2+p^2}}{2p}\left(2a\,x-2p\,y+p^2\right)=0$

Une équation cartésienne de la droite (M_1M_2) est : $y=\dfrac{a}{p}x+\dfrac{p}{2}$.

Cette droite passe par le point $F\left(0\,;\dfrac{p}{2}\right)$.

Réciproquement, si (*D*) est une droite passant par *F* et autre que (*Fy*), elle admet une équation cartésienne de la forme : gjulia $y = k\,x + \dfrac{p}{2}$. Elle s'identifie à une et une seule droite $(M_1 M_2)$, celle obtenue lorsque $a = k\,p$. On en conclue qu'une telle droite passant par *F* coupe la parabole en deux points où les tangentes sont des droites perpendiculaires.