Interpolation d'une fonction sur un segment par un polynôme du troisième degré bi-osculateur

Ce document présente une méthode d'interpolation d'une fonction dérivable sur un segment par un polynôme osculateur aux extrémités du segment :

- *Une fonction f est définie et dérivable sur un segment* $[a\ ;\ b]$ *(avec* $a<b$ *).*
- *On connaît ses valeurs, ainsi que celle de sa dérivée, en a et en b. En d'autres termes, on suppose connus les quatre réels* $f(a)$; $f'(a)$; $f(b)$; $f'(b)$.
- *On cherche un polynôme P de degré ≤ 3 qui, aux points a et b, prend les mêmes valeurs et a en outre les mêmes nombres dérivés que f (on dit qu'il est « osculateur » à f en ces points). En d'autres termes on cherche P tel que* $(P(a),\ P'(a),\ P(b),\ P'(b)) = (f(a),\ f'(a),\ f(b),\ f'(b))$.

On note qu'il est toujours possible de ramener l'étude d'une fonction sur un segment $[a\ ;\ b]$ *(avec* $a<b$ *) à l'étude d'une fonction associée définie sur un segment de la forme* $[0,\ h]$ *(avec* $h>0$ *). Ceci en posant* $h=b-a$ *et en effectuant le changement :* $f_1(u)=f(a+u)$ *où* $0\le u\le b-a$. *C'est ce que fait implicitement, et à bon escient, Nancy-Metz bac série C 1982. Ce changement réduit considérablement les écritures que l'on a à manipuler. Je renvoie éventuellement à ce très intéressant sujet.*

Ici, le parti pris est d'aborder « de front » le cas général.

1. Le sujet

A. Un résultat préliminaire, en application du théorème de Rolle

Rappel du théorème de Rolle :

Soit *f* une fonction continue sur un segment $[a,\ b]$ (avec $a<b$), dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,\ b[$, et telle que $f(a)=f(b)=0$. Alors il existe au moins une valeur c de l'intervalle ouvert $]a,\ b[$ telle que :
$f'(c)=0$

Fin du rappel

On considère maintenant une fonction *f* possédant des dérivées au moins jusqu'au quatrième ordre, la dérivée d'ordre 4 étant continue, sur l'intervalle $[a,\ b]$ ($a<b$) et en outre telle que $f(a)=f(b)=0$ et $f'(a)=f'(b)=0$.
En d'autres termes, *f* est de classe C^4 sur $[a,\ b]$ et s'annule, ainsi que sa fonction dérivée première, aux extrémités du segment $[a,\ b]$.

Soit u un réel quelconque tel que $a<u<b$. On pose pour tout x de $[a,\ b]$:
$g_u(x) =_{gj} f(x) - \dfrac{(x-a)^2(x-b)^2}{(u-a)^2(u-b)^2} f(u)$.

Par construction, cette fonction g_u s'annule au moins en trois points : en *a*, en *u* et en *b*.

1.1. Justifier que g_u est de classe C^4 sur $[a,\ b]$.

1.2. Expliciter quelle est sa fonction dérivée et quelle est la classe de cette fonction.

1.3. Montrer qu'il existe deux réels c_1 et c_2, avec $a < c_1 < u < c_2 < b$ tels que : $g_u'(c_1) = g_u'(c_2) = 0$. En déduire que la fonction dérivée première g_u' s'annule sur $[a\ ;\ b]$ au moins en quatre points.

2. Montrer que la fonction dérivée seconde $g_u^{(2)}$ s'annule en au moins trois points d_1, d_2, d_3 tels que $a < d_1 < d_2 < d_3 < b$.

3. Montrer que la dérivée troisième $g_u^{(3)}$ s'annule en au moins deux points distincts de l'intervalle $]a,\ b[$.

4. En déduire que pour tout réel u de l'intervalle $]a,\ b[$, il existe un réel θ de l'intervalle $]a,\ b[$ tel que :

$$f(u) \underset{gjulia}{=} \frac{(u-a)^2(u-b)^2}{24} f^{(4)}(\theta)$$

5. Justifier l'existence du nombre réel positif : $M = \sup\limits_{t \in [a\ ;\ b]} \left(\left|f^{(4)}(t)\right|\right)$.

Montrer que quel que soit le réel x tel que $a \leq x \leq b$: $|f(x)| \leq \dfrac{M}{24}(x-a)^2(x-b)^2$

6. En conséquence, deux autres majorations.

6.1. Montrer que, quel que soit x appartenant à $[a,\ b]$: $|f(x)| \leq \dfrac{M}{384}(b-a)^4$ (majoration indépendante de x)

6.2. Montrer que $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \dfrac{M}{720}(b-a)^5$ (majoration de l'intégrale de f sur $[a,\ b]$)

B. L'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, un isomorphisme avec $\mathbf{R}^4$, une base

On considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}_3[X]$constitué par le polynôme nul et l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, à coefficients réels. Il s'agit d'un espace vectoriel de dimension 4 dont la famille des quatre monômes $\{X^3, X^2, X, 1\}$ constitue la base canonique.

Soit l'application linéaire Φ définie sur $\mathbf{R}_3[X]$et à valeurs dans $\mathbf{R}^4$ qui, à chaque polynôme de $\mathbf{R}_3[X]$, associe ses valeurs en a et en b ainsi que ses nombres dérivés en a et en b : $P \xrightarrow{\Phi} \Phi(P) = (P(a), P'(a), P(b), P'(b))$.

1. Montrer que Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2.1. Soit Φ^{-1} l'isomorphisme réciproque de Φ. Déterminer $P_1 = \Phi^{-1}(1,0,0,0)$ et $P_2 = \Phi^{-1}(0,1,0,0)$.

2.2 Soit $P_3 = 1 - P_1$ et P_4 défini par : $P_4(X) = -P_2(a+b-X)$. Vérifier que $P_3 = \Phi^{-1}(0,0,1,0)$ et que $P_4 = \Phi^{-1}(0,0,0,1)$.

3.1. Montrer que la famille des quatre polynômes $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ est une base de $\mathbf{R}_3[X]$.On note $\mathcal{B}$ cette base.

3.2. Soit Q un polynôme de $\mathbf{R}_3[X]$. Préciser ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, en fonction de ses valeurs et de celles de son polynôme dérivé en a et en b.

C. Un polynôme d'interpolation associé à une fonction.

On considère une fonction f de classe C^1 sur un intervalle (avec $a<b$).

On suppose connues les valeurs de f aux extrémités de cet intervalle, ainsi que les valeurs de la dérivée de f en ces mêmes extrémités. En d'autres termes, on suppose connus les quatre réels $f(a)$; $f'(a)$; $f(b)$; $f'(b)$.

1.1. Justifier qu'il existe un unique polynôme P_f de $\mathbf{R}_3[X]$ tel que : $\begin{cases} P_f(a)=f(a) \\ P_f'(a)=f'(a) \\ P_f(b)=f(b) \\ P_f'(b)=f'(b) \end{cases}$. En d'autres termes, un tel polynôme de degré inférieur ou égal à 3 prend les mêmes valeurs que f, et a les mêmes nombres dérivés que f, en chacune des deux extrémités de l'intervalle $[a,\ b]$.

On dira de P_f qu'il s'agit du « polynôme interpolateur de Hermite[1] associé à f sur l'intervalle $[a,\ b]$ »

1.2. Préciser les coordonnées de ce polynôme P_f dans la base $\mathcal{B}$. Proposer une expression de $P_f(X)$ en fonction de X, a, b. (*Pas nécessairement la forme développée, peu importe la forme, l'essentiel est qu'elle soit correcte …*)

On suppose désormais que f est de classe C^4

En utilisant la partie préliminaire A de ce problème :

2. Montrer que quel que soit le réel x tel que $a \le x \le b$: $\left|f(x)-P_f(x)\right| \le \dfrac{(x-a)^2(x-b)^2}{24} \sup\limits_{t\in[a\ ;\ b]}\left(\left|f^{(4)}(t)\right|\right)$

3. Proposer une majoration de $\left|f(x)-P_f(x)\right|$ indépendante de x sur l'intervalle $[a,\ b]$.

4. Proposer une majoration de $\int_a^b \left|f(x)-P_f(x)\right| dx$

5. Application numérique :

On considère la fonction f définie sur $[0,\ 1]$ par : $f(x)=\dfrac{4}{1+x^2}$.

5.1. Déterminer son polynôme interpolateur de Hermite P_f sur l'intervalle $[0,\ 1]$

5.2. Proposer un majorant de $\left|f^{(4)}(t)\right|$ sur l'intervalle $[0,\ 1]$. Que deviennent les inégalités **2, 3, 4** dans cette application numérique ? En particulier, proposer un encadrement de $I=\int_0^1 P_f(x)\,dx$.

[1] Charles HERMITE (1822- 1901), mathématicien lorrain ; les « formes hermitiennes » et les « espaces hermitiens » lui doivent leur nom. Connu pour sa démonstration de la transcendance du nombre *e*.

D. Une fonction d'interpolation polynomiale par morceaux

On considère une fonction f que l'on supposera de classe C^4 sur l'intervalle $[a,\ b]$ (avec $a<b$).

Afin d'améliorer la qualité d'interpolation :

- On partage l'intervalle $[a,\ b]$ en n intervalles de longueur égale, où n est un entier supérieur ou égal à 2.
- Pour chaque entier k tel que $1\le k\le n$, on note $P_{f,k}$ le polynôme de Hermite associé à f sur l'intervalle $\left[a+\frac{k-1}{n}(b-a),\ \ a+\frac{k}{n}(b-a)\right]$
- Enfin, on note G_n la fonction qui, sur chacun des intervalles $\left[a+\frac{k-1}{n}(b-a),\ \ a+\frac{k}{n}(b-a)\right]$ ($1\le k\le n$), coïncide avec $P_{f,k}$, le polynôme de Hermite associé à f sur cet intervalle.

1. Justifier que G_n est une fonction dérivable sur $[a,\ b]$.

2. Proposer une majoration de $|f(x)-G_n(x)|$ indépendante de x sur l'intervalle $[a,\ b]$.

3. Proposer une majoration de $\int_a^b |f(x)-G_n(x)|dx$

4. Application numérique au calcul approché d'une intégrale :

On considère à nouveau la fonction f définie sur $[0,\ 1]$ par : $f(x)=\dfrac{4}{1+x^2}$.
S'aider d'un logiciel de calcul formel pour construire, par exemple, la fonction G_{10} et calculer son intégrale sur $[0,\ 1]$. En déduire un nouvel encadrement de $I=\int_0^1 P_f(x)\,dx)$

Quel encadrement obtiendrait-on à l'aide de G_{20} ?

2. Eléments de correction

A. Un résultat préliminaire, en application du théorème de Rolle

1.1. La fonction g_u ainsi construite est une différence entre la fonction f et une fonction polynôme (qui est de classe C^∞). Elle est de la même classe que la fonction f, donc par hypothèse de classe C^4 sur le segment $[a,\ b]$.

1.2. $g_u'(x) \underset{gilbertjulia2018}{=} f'(x) - \dfrac{2(x-a)(x-b)(2x-a-b)}{(u-a)^2(u-b)^2} f(u)$.

Puisque cette fonction dérive d'une fonction de classe C^4, il s'agit d'une fonction de classe C^3.

1.3. Les hypothèses du théorème de Rolle sont vérifiées sur chacun des deux intervalles $[a,\ u]$ et $[u,\ b]$..

Il existe au moins un réel c_1 tel que $a < c_1 < u$ et $g_u'(c_1) = 0$ et il existe au moins un réel c_2 tel que $u < c_2 < b$ et $g_u'(c_2) = 0$

Ce qui prouve l'existence de deux réels c_1 et c_2, avec $a < c_1 < u < c_2 < b$ tels que : $g_u'(c_1) = g_u'(c_2) = 0$.

De plus, vu l'expression de la fonction dérivée, $g_u'(a) = g_u'(b) = 0$:

Cette fonction, de classe C^3, s'annule en quatre points distincts : $a,\ c_1,\ c_2,\ b$.

2. Les hypothèses du théorème de Rolle sont vérifiées à propos de la fonction dérivée première sur chacun des trois intervalles $[a,\ c_1]$; $[c_1,\ c_2]$; $[c_2,\ b]$.

Il existe au moins un réel d_1 tel que $a < d_1 < c_1$ et $g_u''(d_1) = 0$, il existe au moins un réel c_2 tel que $c_1 < d_2 < c_2$ et $g_u''(d_2) = 0$ et il existe au moins un réel d_3 tel que $c_2 < d_3 < b$ et $g_u''(d_3) = 0$

D'où l'existence de trois réels : $a < d_1 < d_2 < d_3 < b$ tels que $g_u^{(2)}(d_1) = g_u^{(2)}(d_2) = g_u^{(2)}(d_2) \underset{gj}{=} 0$

3. La fonction dérivée seconde est une fonction de classe C^2. Il s'agit pour information de la fonction définie par : $g_u^{(2)}(x) \underset{gj}{=} f^{(2)}(x) - \dfrac{12x^2 - 12(a+b)x + 2a^2 + 8ab + 2b^2}{(u-a)^2(u-b)^2} f(u)$

Les hypothèses du théorème de Rolle sont vérifiées à propos de cette fonction sur chacun des deux intervalles $[d_1,\ d_2]$ et $[d_2,\ d_3]$. Il existe deux réels e_1 et e_2 vérifiant $d_1 < e_1 < d_2 < e_2 < d_3$ et tels que $g_u^{(3)}(e_1) = g_u^{(2)}(e_2) = 0$

La dérivée troisième est de classe C^1. Les hypothèses du théorème de Rolle s'appliquent à cette fonction sur l'intervalle $[e_1,\ e_2]$. Il existe un réel θ vérifiant $a < e_1 < \theta < e_2 < b$ et tel que $g_u^4(\theta) = 0$

Or : $g_u^{(3)}(x) \underset{gj}{=} f^{(3)}(x) - \dfrac{24x - 12(a+b)}{(u-a)^2(u-b)^2} f(u)$ et $g_u^{(4)}(x) \underset{gj}{=} f^{(4)}(x) - \dfrac{24}{(u-a)^2(u-b)^2} f(u)$

Il existe un réel θ de l'intervalle ouvert $]a,\ b[$ (et dépendant de u, on peut le noter plutôt θ_u pour marquer cette dépendance) tel que : $f^{(4)}(\theta_u) - \dfrac{24}{(u-a)^2(u-b)^2} f(u) = 0$, c'est-à-dire tel que :

$$f(u) \underset{gjulia}{=} \frac{(u-a)^2(u-b)^2}{24} f^{(4)}(\theta_u)$$

4. Puisque f est supposé de classe C^4, sa dérivée quatrième est continue sur l'intervalle $[a,\ b]$. En tant que fonction continue, la dérivée quatrième de f est bornée sur ce segment. Ce qui justifie l'existence de $M = \sup_{t\in[a\ ;\ b]}\left(\left|f^{(4)}(t)\right|\right)$.

5. Pour $x = a$; $x = b$, l'inégalité est triviale. Pour $a < x < b$, on fait jouer à x le rôle de u comme ci-dessus et on tient compte de l'inégalité $\left|f^{(4)}(\theta_x)\right| \leq \sup_{t\in[a\ ;\ b]}\left(\left|f^{(4)}(t)\right|\right)$

Quel que soit le réel x tel que $a \leq x \leq b$: $\left|f(x)\right| \leq_{gjulia} \dfrac{M}{24}(x-a)^2(x-b)^2$.

6.1. Sachant que l'expression $(x-a)(x-b)$, négative sur $[a,\ b]$, est extrémale lorsque $x = \dfrac{a+b}{2}$ et que l'extremum est $-\dfrac{(b-a)^2}{4}$, le carré de cette expression est extrémal pour la même valeur et son extremum (maximum) est $\dfrac{(b-a)^4}{16}$, ce qui donne une majoration indépendante de x :

$$\left|f(x)\right| \leq \frac{M}{24} \times \frac{(b-a)^4}{16} = \frac{M}{384}(b-a)^4$$

6.2. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b \left|f(x)\right| dx \leq \dfrac{M}{24}\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2\,dx = \dfrac{M}{24} \times \dfrac{(b-a)^5}{30} = \dfrac{M}{720}(b-a)^5$

Partie B. L'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, un isomorphisme, une base.

1. Pour toutes fonctions f et g de classe C^1 sur $[a\,;b]$ et tout couple de réels (λ,μ) : $(\lambda f+\mu g)(x)=\lambda f(x)+\mu g(x)$ en raison de la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur $[a\,;b]$ et $(\lambda f+\mu g)'(x)=\lambda f'(x)+\mu g'(x)$ en raison des propriétés de linéarité de la dérivation. Ce qui justifie la nature d'application linéaire de Φ. L'application Φ est linéaire d'un espace de dimension 4 vers un autre de même dimension. Il suffit qu'elle soit injective pour être un isomorphisme.

Un polynôme Q appartient au noyau de Φ si et seulement si a et b sont deux racines distinctes de Q, chacune avec au moins un ordre de multiplicité égal à 2. Dans l'ensemble $\mathbb{R}_3[X]$, seul le polynôme nul a cette propriété, car un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à 3 a au plus trois racines, comptées avec leur ordre de multiplicité.
Le noyau de Φ ne contient que le polynôme nul, Φ est injective donc bijective. C'est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2.1. Les polynômes du troisième degré P_1 et P_2 admettent tous deux b comme racine double, puisqu'ils s'annulent, de même que leur polynôme dérivé, en b. Ils sont factorisables par $(X-b)^2$ et le facteur complémentaire est du premier degré. Il s'agit de polynômes de la forme : $P(X)=(X-b)^2(u\,X+v)$ où u et v sont deux coefficients réels. Son polynôme dérivé est : $P(X)=(X-b)(3u\,X-b\,u+2v)$

En considérant les valeurs de ces polynômes et de leur polynôme dérivé au point a on obtient les relations suivantes : $\begin{cases}(a-b)^2(a\,u+v)=1\\(a-b)\big((3a-b)u+2v\big)=0\end{cases}$ ainsi que respectivement $\begin{cases}(a-b)^2(a\,u+v)=0\\(a-b)\big((3a-b)u+2v\big)=1\end{cases}$.

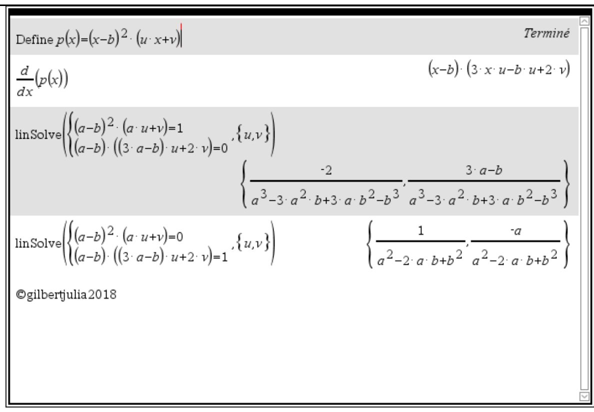
Il s'agit de résoudre deux systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues.

On obtient pour P_3 :

$$u=\frac{2}{(b-a)^3}\ ;\ v=\frac{b-3a}{(b-a)^3}$$

et pour P_4:

$$u=\frac{1}{(b-a)^2}\ ;\ v=\frac{-a}{(b-a)^2}$$



Soit : $P_1(X)=\dfrac{(X-b)^2}{(b-a)^3}(2X+b-3a)$; *gilbertjulia* 2018 $P_2(X)=\dfrac{(X-b)^2}{(b-a)^2}(X-a)$

2.3. L'expression des polynômes P_3 et P_4 peut s'en déduire en permutant les rôles de a et de b : $P_3(X)=\dfrac{(X-a)^2}{(a-b)^3}(2X+a-3b)$; *gilbertjulia* 2018 $P_4(X)=\dfrac{(X-a)^2}{(a-b)^2}(X-b)$.

Cependant, on note que : $\begin{cases} 1-P_1(a)=0 \\ 1-P_1(b)=1 \end{cases}$ et que $(1-P_1)'=-P'_1$, en conséquence : $(1-P_1)'(a)=(1-P_1)'(b)=0$.

Le polynôme $1-P_1$ a même image par Φ que P_3, il s'agit d'un seul et même polynôme.

De façon analogue : $-P_1(a+b-a)=-P_1(b)=0$; $-P_1(a+b-b)=-P_1(a)=0$ et : $(-P_1(a+b-X))'=P_1'(a+b-X)$ et en conséquence, $(-P_1(a+b-X))'$ prend la valeur zéro en a et la valeur 1 en b, il a même image par Φ que P_4, il s'agit d'un seul et même polynôme.

$P_3(X)=1-P_1(X)$; $P_4(X)=-P_2(a+b-X)$

3.1. En tant qu'image de la base canonique de $\mathbf{R}^4$ par une application linéaire bijective (l'application Φ^{-1}) la famille $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

3.2. Soit Q un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_3[X]$, exprimé dans la base $\mathcal{B}$: $Q=\alpha P_1+\beta P_2+\gamma P_3+\delta P_4$
En considérant les valeurs de Q et de son polynôme dérivé en a et en b, on obtient directement : $Q(a)=\alpha$; $Q'(a)=\beta$; $Q(b)=\gamma$; $Q'(b)=\delta$

3.3. L'expression du polynôme Q dans cette base :

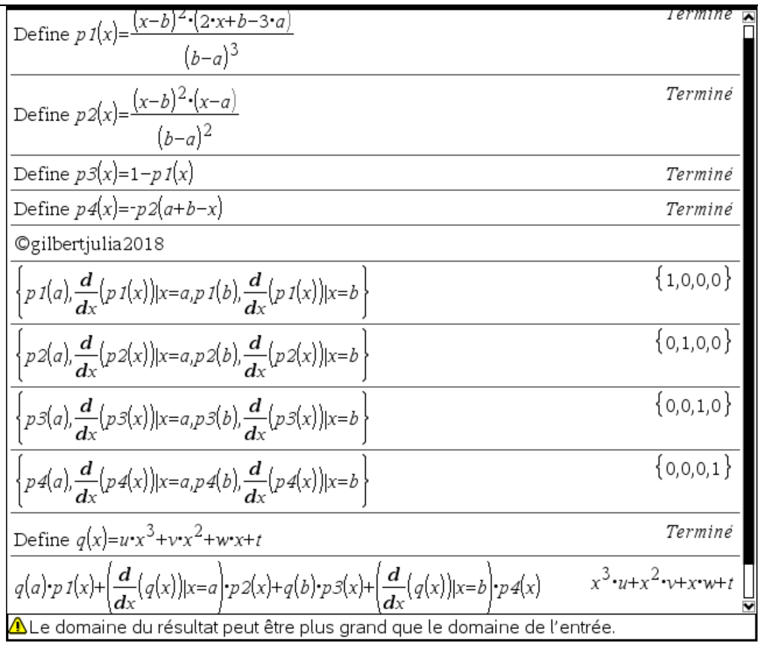
$$Q(X)=Q(a)\frac{(X-b)^2(2X+b-3a)}{(b-a)^3}+Q'(a)\frac{(X-b)^2(X-a)}{(b-a)^2}+Q(b)\frac{(X-a)^2(2X+a-3b)}{(a-b)^3}+Q'(b)\frac{(X-a)^2(X-b)}{(a-b)^2}$$

Ou bien, compte tenu des relations entre ces divers polynômes, on peut aussi proposer la formule suivante :

$$Q(X)=(Q(a)-Q(b))\frac{(X-b)^2(2X+b-3a)}{(b-a)^3}+\frac{(Q'(a)(X-b)-Q'(b)(X-a))}{(b-a)^2}(X-a)(X-b)+Q(b)$$

L'usage d'un logiciel de calcul formel confirme ces résultats. la famille des quatre polynômes $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ est bien l'image réciproque par Φ de la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

Les coordonnées d'un polynôme Q dans cette base sont bien ses valeurs et celles de son polynôme dérivé en a et en b.



Une autre méthode

Une autre méthode de construction de ces polynômes P_i aurait été la suivante :

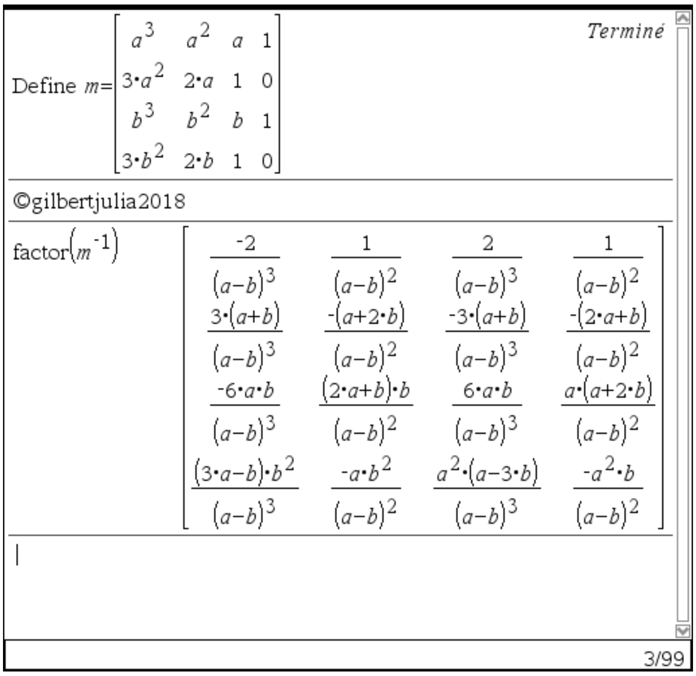
Les images par Φ des polynômes de la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$ sont respectivement : $\Phi(X^3)=(a^3,\, 3a^2,\, b^3,\, 3b^2)$; $\Phi(X^2)=(a^2,\, 2a,\, b^2,\, 2b)$

$\Phi(X)=(a,\, 1,\, b,\, 1)$; $\Phi(1)=(1,\, 0\, 1,\, 0)$

On en déduit la matrice de Φ :

$$M_\Phi=\begin{pmatrix} a^3 & a^2 & a & 1\\ 3a^2 & 2a & 1 & 0\\ b^3 & b^2 & b & 1\\ 3b^2 & 2b & 1 & 0\end{pmatrix}$$

La matrice inverse, dont on délègue le calcul à un logiciel de calcul formel, fournit, en colonnes, les coordonnées des quatre polynômes P_i dans la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$



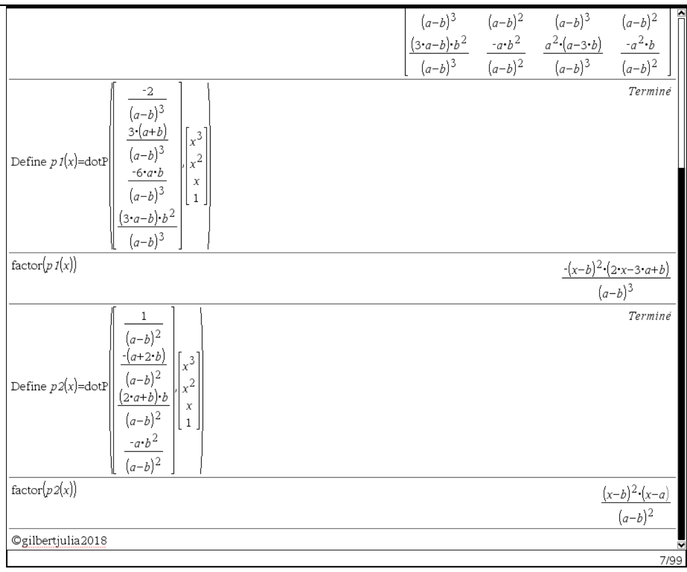
Define $m=\begin{bmatrix} a^3 & a^2 & a & 1\\ 3\cdot a^2 & 2\cdot a & 1 & 0\\ b^3 & b^2 & b & 1\\ 3\cdot b^2 & 2\cdot b & 1 & 0\end{bmatrix}$ Terminé

©gilbertjulia2018

factor(m^{-1}) $\begin{bmatrix} \frac{-2}{(a-b)^3} & \frac{1}{(a-b)^2} & \frac{2}{(a-b)^3} & \frac{1}{(a-b)^2}\\ \frac{3\cdot(a+b)}{(a-b)^3} & \frac{-(a+2\cdot b)}{(a-b)^2} & \frac{-3\cdot(a+b)}{(a-b)^3} & \frac{-(2\cdot a+b)}{(a-b)^2}\\ \frac{-6\cdot a\cdot b}{(a-b)^3} & \frac{(2\cdot a+b)\cdot b}{(a-b)^2} & \frac{6\cdot a\cdot b}{(a-b)^3} & \frac{a\cdot(a+2\cdot b)}{(a-b)^2}\\ \frac{(3\cdot a-b)\cdot b^2}{(a-b)^3} & \frac{-a\cdot b^2}{(a-b)^2} & \frac{a^2\cdot(a-3\cdot b)}{(a-b)^3} & \frac{-a^2\cdot b}{(a-b)^2}\end{bmatrix}$

3/99

On en extrait les expressions des polynômes P_i, expressions que l'on peut factoriser. Ci contre, on a calculé ces expressions en exprimant le produit scalaire (**dotP**) du vecteur colonne des coordonnées de P_i avec le vecteur colonne des éléments de la base canonique



Define $p1(x)=\text{dotP}\left(\begin{bmatrix} \frac{-2}{(a-b)^3}\\ \frac{3\cdot(a+b)}{(a-b)^3}\\ \frac{-6\cdot a\cdot b}{(a-b)^3}\\ \frac{(3\cdot a-b)\cdot b^2}{(a-b)^3}\end{bmatrix},\begin{bmatrix} x^3\\ x^2\\ x\\ 1\end{bmatrix}\right)$ Terminé

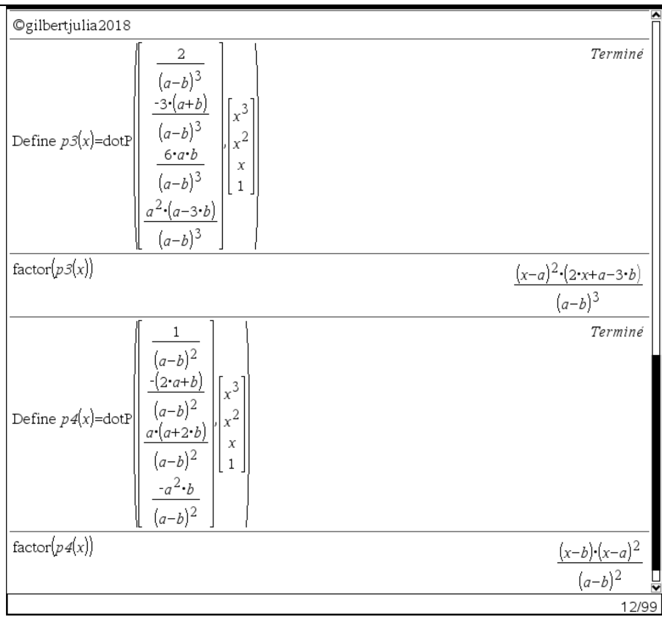
factor$(p1(x))$ $\frac{-(x-b)^2\cdot(2\cdot x-3\cdot a+b)}{(a-b)^3}$

Define $p2(x)=\text{dotP}\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{(a-b)^2}\\ \frac{-(a+2\cdot b)}{(a-b)^2}\\ \frac{(2\cdot a+b)\cdot b}{(a-b)^2}\\ \frac{-a\cdot b^2}{(a-b)^2}\end{bmatrix},\begin{bmatrix} x^3\\ x^2\\ x\\ 1\end{bmatrix}\right)$ Terminé

factor$(p2(x))$ $\frac{(x-b)^2\cdot(x-a)}{(a-b)^2}$

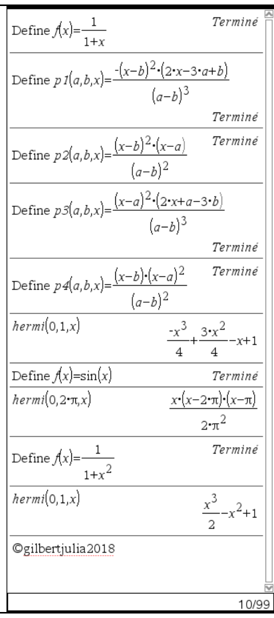
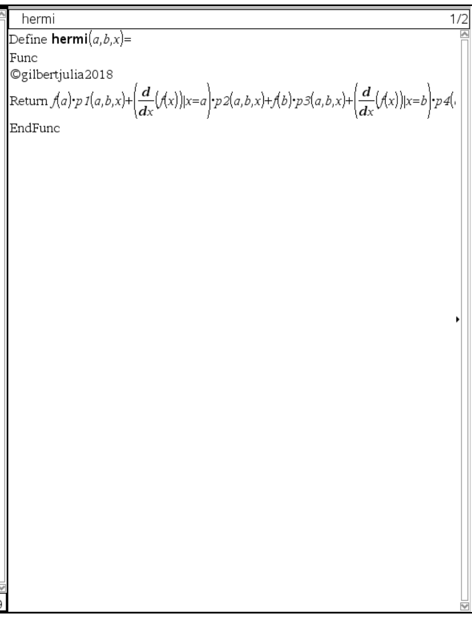
©gilbertjulia2018

7/99

On peut vérifier que l'on retrouve ainsi les mêmes billes	

Partie C.

1. Le polynôme P_f est par construction le polynôme $P_f = H^{-1}\left(\left(f(a),\ f'(a),\ f(b),\ f'(b)\right)\right)$ *gilbertjulia*

La partie B a montré que H était un isomorphisme et que en conséquence tout élément de $\mathbf{R}^4$ avait un antécédent et un seul par H, ce qui justifie l'existence et l'unicité de P_f. Afin d'automatiser la recherche de P_f, les polynômes P_i ont été affectés de trois arguments (on a ajouté les extrémités de l'intervalle d'interpolation). La fonction **hermi** renvoie l'expression du polynôme P_f associée à une fonction f que l'on a définie. L'écran ci-contre en montre quelques exemples.	 

2. On applique les résultats de la partie A avec : $u(x) = f(x) - P_f(x)$, qui s'annule, ainsi que sa dérivée, en chacune des extrémités de l'intervalle $[a,\ b]$. Puisque P_f est de degré 3, sa dérivée quatrième est nulle et $u^{(4)} = f^{(4)}$. Les fonctions f et u ont la même dérivée quatrième.

Les résultats des questions **5**, **6.1** et **6.2** appliqués à cette fonction fournissent les trois réponses.

En particulier, $\left|f(x) - P_f(x)\right| \underset{gj}{\leq} \dfrac{(b-a)^4}{384} \sup\limits_{t\in[a\ ;\ b]}\left(\left|f^{(4)}(t)\right|\right)$ est une majoration indépendante de x.

On note aussi qu'en raison de la linéarité de l'intégrale :

$$\left|\left(\int_a^b f(x)dx\right) - \left(\int_a^b P_f(x)dx\right)\right| \leq \frac{M}{720}(b-a)^5 \text{ où } M = \sup_{t\in[a\ ;\ b]}\left(\left|f^{(4)}(t)\right|\right)$$

Partie D. Fonction d'interpolation polynomiale par morceaux

On peut être tenté, pour améliorer la qualité de l'interpolation, de découper le segment $[a\ ;b]$ en plusieurs morceaux de même longueur, disons en n segments de longueur $h=\dfrac{b-a}{n}$, et de construire un polynôme d'interpolation sur chaque segment.

Pour chaque entier k tel que $1\le k\le n$, on note $P_{f,k}$ le polynôme de Hermite associé à f sur l'intervalle $\left[a+\dfrac{k-1}{n}(b-a),\ a+\dfrac{k}{n}(b-a)\right]$

1. La fonction G_n coïncide avec une fonction polynôme à l'intérieur de chacun des intervalles $\left[a+\dfrac{k-1}{n}(b-a),\ a+\dfrac{k}{n}(b-a)\right]$. Elle est de classe C^∞ à l'intérieur de chacun d'eux.

Reste la question des raccordements. Mais en un point de subdivision $a+\dfrac{k}{n}(b-a)$, on note que $P_{f,k}\left(a+\dfrac{k(b-a)}{n}\right)=P_{f,k+1}\left(a+\dfrac{k(b-a)}{n}\right)=f\left(a+\dfrac{k(b-a)}{n}\right)$: le raccordement est continu. (ce qui légitime le fait que dans la définition par morceaux de G_n, les intervalles de subdivision soient anormalement fermés des deux côtés, alors qu'ils devraient être semi-ouverts : la définition donne le même résultat que le point de subdivision soit considéré comme extrémité droite d'un segment ou extrémité gauche du segment suivant).

De plus : $P'_{f,k}\left(a+\dfrac{k(b-a)}{n}\right)=P'_{f,k+1}\left(a+\dfrac{k(b-a)}{n}\right)=f'\left(a+\dfrac{k(b-a)}{n}\right)$, la fonction G_n a le même nombre dérivé à droite et à gauche en ces points de subdivision, elle y est continûment dérivable.
Elle est de classe C^1.

2. Soit $M=\sup\limits_{t\in[a\ ;\ b]}\left(\left|f^{(4)}(t)\right|\right)$. Alors, pour chaque entier k tel que $1\le k\le n$, $M\ge \sup\limits_{t\in\left[a+\frac{(k-1)(b-a)}{n}\ ;\ a+\frac{(b-a)}{n}\right]}\left(\left|f^{(4)}(t)\right|\right)$, le maximum sur chaque intervalle de subdivision est au plus égal au maximum « général ».
On peut appliquer une majoration à l'aide du majorant M sur chaque intervalle de subdivision.

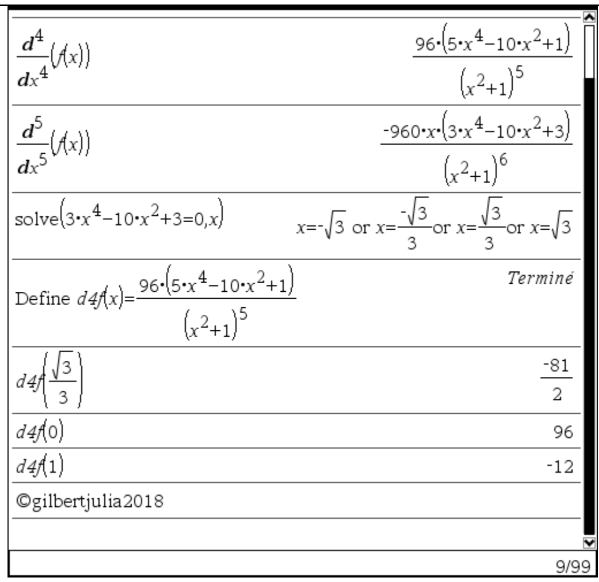
En particulier, $\left|f(x)-G_n(x)\right|\le_{gj} M\dfrac{(b-a)^4}{384n^4}$ est une majoration indépendante de x.

Et $\left|\left(\int_a^b f(x)dx\right)-\left(\int_a^b G_n(x)dx\right)\right|_{gjulia}\le M\dfrac{(b-a)^5}{720n^5}$ est une majoration de la différence des intégrales.

4. Application numérique :

On considère la fonction f définie sur $[0,\ 1]$ par : $f(x)=\dfrac{4}{1+x^2}$.

$f^{(4)}(t)=\dfrac{96\left(5t^4-10t^2+1\right)}{\left(t^2+1\right)^5}$. Une étude sommaire des variations de cette fonction sur $[0,\ 1]$ montrerait qu'elle atteint son maximum en zéro et son minimum en $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et que sur cet intervalle $-\dfrac{81}{2}\le f^{(4)}(t)\underset{gilbertjulia2018}{\le} 96$. En conséquence, $\sup\limits_{t\in[0\ ;\ 1]}\left(\left|f^{(4)}(t)\right|\right)=96$



4.3. $P_f(x)=2x^3-4x^2+4$ et $\int_0^1 P_f(x)dx=\dfrac{19}{6}$.

On en déduit que $\left|I-\dfrac{19}{6}\right|\underset{gilbertjulia}{\le}\dfrac{96}{720}=\dfrac{2}{15}$ puis que $\dfrac{91}{30}\le I\le\dfrac{33}{10}$, ou bien si l'on veut $3{,}03\le I\le 3{,}3$. La qualité de l'encadrement est un tout petit peu décevante …

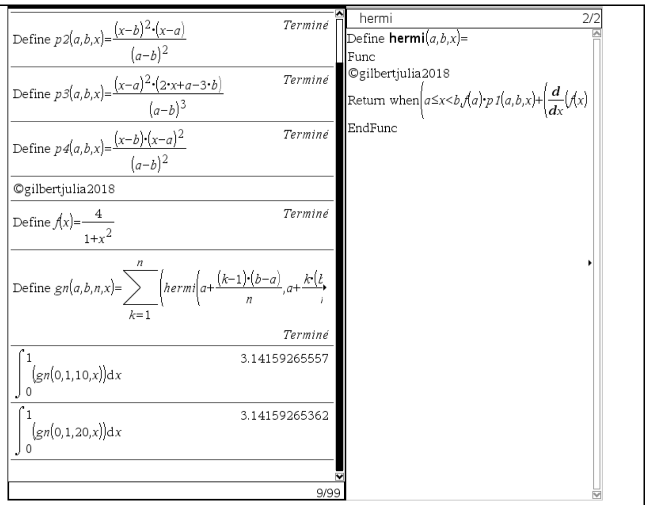
Avec la fonction G_n on obtiendra dans ce contexte : $\left|\left(\int_0^1 f(x)dx\right)-\left(\int_0^1 G_n(x)dx\right)\right|_{gjulia}\le\dfrac{2}{15n^5}$

L'écriture de la fonction **hermi** a été modifiée à l'aide de l'instruction **when**. Désormais, cette fonction coïncide avec le polynôme d'interpolation si $a\le x<b$ et elle est nulle sinon.

La fonction **gn** a quatre arguments dont le nombre n de subdivisions de l'intervalle $[a,\ b]$. Elle est la somme des fonctions **hermi** définies sur chacun des intervalles de subdivision. De la sorte, elle coïncide sur chaque intervalle de subdivision avec le polynôme $P_{f,k}$.

Ci-contre est a été définie lorsque $n=10$ et on a affiché son intégrale sur l'intervalle $[0,\ 1]$.

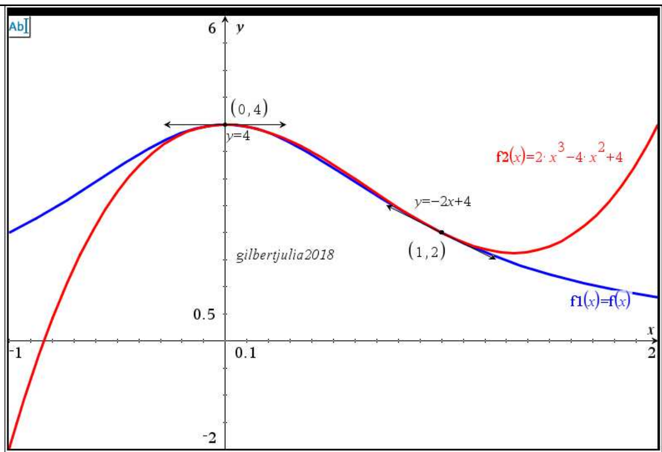
Pour information, on a fait la même chose avec $n=20$



$$\left|\left(\int_0^1 f(x)dx\right)-\left(\int_0^1 G_{10}(x)dx\right)\right|_{gjulia} \leq \frac{2}{15.10^5}<0{,}0000014$$. On en conclut que $3{,}141591<I<3{,}141595$.

On obtiendrait, de façon analogue, $\left|\left(\int_0^1 f(x)dx\right)-\left(\int_0^1 G_{20}(x)dx\right)\right|_{gjulia} \leq \frac{1}{240.10^5}<0{,}00000005$ et par suite $3{,}1415926<I<3{,}14159268$

Représentation graphique de f et de son polynôme d'interpolation de Hermite relatif à l'intervalle $[0,\ 1]$.



Il n'est guère possible de distinguer « à l'œil nu » la représentation graphique de f et celle de sa fonction G_{10}.

En effet, $|f(x)-G_{10}(x)|\leq 2{,}5.\ 10^{-5}$ pour tout réel x de l'intervalle $[0,\ 1]$.