Autour des nombres harmoniques et de la série harmonique

Pour tout entier strictement positif n, on désigne par S_n la somme : $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$ des inverses des n premiers entiers.

Ainsi : $S_1 = 1$; $S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; $S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$. Le nombre S_n est appelé « $n^{ième}$ nombre harmonique ».

Ce problème regroupe un certain nombre de résultats plus ou moins classiques autour de ces « nombres harmoniques ».

1. Le sujet

A. Divergence vers plus l'infini de la série harmonique

1. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$

2. Montrer que pour tout entier n strictement positif : $S_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq S_n$.

3. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$

B. Constante d'Euler

1. Montrer que pour tout entier n strictement positif : $\ln(n+1) \leq S_n \leq \ln n + 1$

On s'intéresse désormais à l'écart entre S_n et $\ln n$.

À cet effet, on pose pour tout entier n strictement positif : $u_n = S_n - \ln n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n$.

2.1. Montrer que pour tout entier n strictement positif , $0 \leq u_n \leq 1$

2.2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante.

2.3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers un réel C appartenant à l'intervalle $[0 ; 1 - \ln 2]$. (*La « constante d'Euler »*)

3. Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $v_n = u_n - \frac{1}{n}$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont des suites adjacentes.

4. Proposer un encadrement de C d'amplitude 10^{-1}.

C. Existe-t-il des nombres harmoniques qui sont des entiers ?

Partie inspirée par l'exercice Terracher édition 1999, TS Spé 103 page 57

On note que le nombre $S_1 = 1$, premier nombre harmonique , est un entier.

Mais existe-t-il un autre indice n tel que $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$ soit un nombre entier ?

On se propose d'établir que pour tout entier $n \geq 2$, le nombre S_n est, sous forme irréductible, le quotient d'un nombre impair par un nombre pair. On note que cette propriété est réalisée pour les rangs 2 et 3.
NB. On envisage successivement deux méthodes (questions 1 et 2 puis questions 3 et 4).

Première méthode.

1. À l'aide d'une calculatrice, mettre S_n sous forme irréductible pour n = 1, 2, ..., 10.

2. On se propose d'établir par récurrence sur n que pour tout entier $n \geq 2$, le nombre S_n est, sous forme irréductible, le quotient d'un nombre impair par un nombre pair. Soit $n \geq 2$. On suppose cette propriété réalisée **pour tout entier** $m \leq n$ (hypothèse de récurrence forte).

2.1. Premier cas : n pair. Prouver qu'alors la propriété est réalisée au rang $n+1$.

2.2. Deuxième cas : n impair. On pose alors $n = 2m-1$. Vérifier que : $S_{2m} = \frac{1}{2}S_m + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2m-1}$.

Conclure encore.

Deuxième méthode

3. À l'aide de la calculatrice, étudier la factorisation en produit de facteurs premiers du nombre q_n pour $n = 1 ; 2 ;... ; 17$. Etudier la présence du facteur 2 dans cette factorisation.

4. Démontrer par récurrence sur p que, pour tout entier n tel que $2^p \leq n < 2^{p+1}$: il existe deux entiers impairs a_n et b_n tels que : $S_n = \frac{a_n}{2^p \times b_n}$

5. Est-il possible que S_n soit un entier ?

2. Eléments de correction

A. Divergence vers plus l'infini de la série harmonique

1. Il s'agit de comparer la série à une intégrale. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est une fonction strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. Ainsi, pour tout entier $k \geq 1$ et tout réel t de l'intervalle $[k\,;\,k+1]$: $\dfrac{1}{k+1} \leq \dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{k}$, ce qui donne par intégration sur $[k\,;\,k+1]$: $\dfrac{1}{k+1} = \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dt = \frac{1}{k}$.

On obtient que pour tout entier $k \geq 1$: $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \dfrac{1}{k}$.

2. Soit n un entier strictement positif . Par sommation terme à terme dans les inégalités précédentes des termes du rang 1 jusqu'à ceux du rang n : $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{k=n} \left(\ln(k+1) - \ln k\right) \leq \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$.

La deuxième somme est soumise à un effet domino. On obtient : $S_{n+1} - 1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k+1} \leq \ln(n+1) \leq S_n$

3. Puisque pour tout entier strictement positif n : $\ln(n+1) \leq S_n$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\ln(n+1)\right) = +\infty = \lim_{n\to+\infty} S_n$.

La série S_n est minorée par une suite divergeant vers plus l'infini, elle diverge elle-même vers plus l'infini.

NB. Les inégalités de gauche sont inutiles pour établir la divergence de la série. Elles auront un intérêt dans la partie B.

B. Constante d'Euler

1. D'une part pour tout entier n strictement positif : $\ln(n+1) \leq S_n$.

D'autre part, d'après la question **2** de la partie A, pour tout entier $n \geq 2$ et par décalage des indices d'une unité : $S_n - 1 \leq \ln n \leq S_{n-1}$. On note que l'inégalité de gauche $S_n - 1 \leq \ln n$ a lieu aussi lorsque $n = 1$.

On obtient pour tout entier n strictement positif l'encadrement : $\ln(n+1) \leq S_n \leq \ln n + 1$

2.1. D'après la question précédente et en prenant en compte la croissance de la fonction logarithme :

Pour tout entier n strictement positif, $\ln n \leq \ln(n+1) \leq S_n \leq \ln n + 1$, et en conséquence $0 \leq S_n - \ln n \leq 1$.

La suite (u_n) est une suite bornée, tous ses termes appartiennent à l'intervalle $[0\,;\,1]$.

2.2. Pour tout entier n strictement positif :

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)\right) -_{\text{gilbertjulia}} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = \frac{1}{n+1} - \left(\ln(n+1) - \ln n\right).$$

Mais d'après **A1** (en choisissant $k = n$ et en considérant l'inégalité de gauche) : $\dfrac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n$.

Ainsi pour tout entier n strictement positif : $u_{n+1} - u_n \leq 0$. La suite (u_n) est une suite décroissante.

2.3. La suite (u_n) est une suite décroissante et minorée par zéro, elle converge. Elle converge vers un réel C appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$ puisque tous les termes de cette suite appartiennent à cet intervalle, et de plus $C \leq 1 - \ln 2 = u_1$

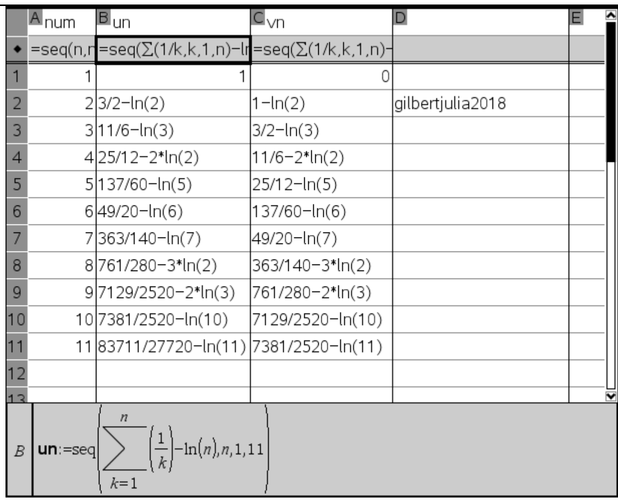
3. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante et $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$. Pour prouver l'adjacence des deux suites, il reste à prouver que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante.

Pour tout entier $n \geq 1$: $v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - (\ln(n+1) - \ln n)$. Mais d'après **A1** (en choisissant $k = n$ et en considérant l'inégalité de droite) : $\ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$.

Ainsi pour tout entier n strictement positif : $v_{n+1} - v_n \geq 0$. La suite (v_n) est une suite croissante.

Ce qui prouve l'adjacence des deux suites. Il en résulte que $v_n \leq C \leq u_n$ pour tout entier n. Les termes d'un même rang des deux suites en jeu déterminent un encadrement de C.

Ci-contre, une tabulation des 11 premiers termes de ces suites

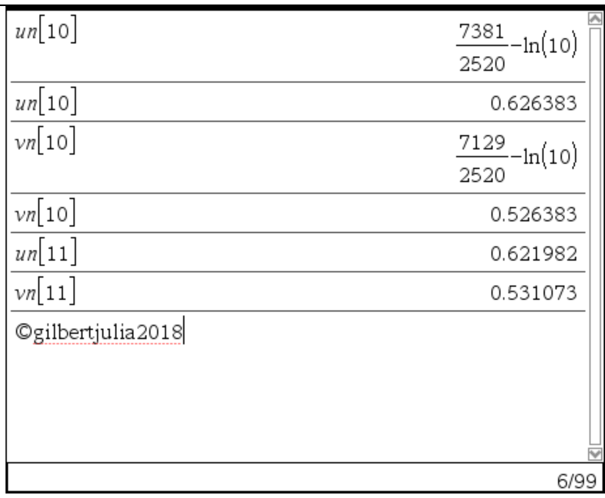


	A num	B un	C vn	D	E
◆	=seq(n,n	=seq(Σ(1/k,k,1,n)−ln	=seq(Σ(1/k,k,1,n)−		
1	1	1	0		
2	2	3/2−ln(2)	1−ln(2)	gilbertjulia2018	
3	3	11/6−ln(3)	3/2−ln(3)		
4	4	25/12−2*ln(2)	11/6−2*ln(2)		
5	5	137/60−ln(5)	25/12−ln(5)		
6	6	49/20−ln(6)	137/60−ln(6)		
7	7	363/140−ln(7)	49/20−ln(7)		
8	8	761/280−3*ln(2)	363/140−3*ln(2)		
9	9	7129/2520−2*ln(3)	761/280−2*ln(3)		
10	10	7381/2520−ln(10)	7129/2520−ln(10)		
11	11	83711/27720−ln(11)	7381/2520−ln(11)		
12					

B **un**:=seq$\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right) - \ln(n), n, 1, 11\right)$

Les termes de rang 10 fournissent un encadrement de C d'amplitude $\frac{1}{10}$.

Cependant, si on veut proposer un encadrement de C de même amplitude par deux nombres décimaux, on est amené, pour une gestion correcte des arrondis, à considérer les termes de rang 11 : $0{,}53 < C < 0{,}63$



C. Existe-t-il des termes de la série harmonique qui sont des entiers ?

Première méthode

La mise sous forme irréductible des premiers nombres harmoniques laisse apparaître que du rang 2 jusqu'au rang 11 inclus, la forme irréductible de S_n est le quotient d'un nombre impair par un nombre pair.

Pour tout entier n tel que $2 \leq n \leq 11$, il existe deux entiers premiers entre eux, p_n impair et q_n pair, tels que $S_n = \dfrac{p_n}{q_n}$

Cette propriété est-elle vraie pour tout entier n ?

	A num	B sn	C	D	E
◆		=seq(Σ(1/k,k,1			
1	1	1			
2	2	3/2	gilbertjulia2018		
3	3	11/6			
4	4	25/12			
5	5	137/60			
6	6	49/20			
7	7	363/140			
8	8	761/280			
9	9	7129/2520			
10	10	7381/2520			
11	11	83711/27720			

B $\mathbf{sn}:=\mathrm{seq}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right),n,1,11\right)$

2. Premier cas. Supposons n pair, $n = 2m$ et la propriété vérifiée à ce rang. (Pas besoin de récurrence forte).

Alors : $S_{2m+1} = \dfrac{p_{2m}}{q_{2m}} + \dfrac{1}{2m+1} = \dfrac{p_{2m}(2m+1)+q_{2m}}{q_{2m}(2m+1)}$.

Le produit $p_{2m}(2m+1)$ est impair car produit de deux impairs et le numérateur $p_{2m}(2m+1)+q_{2m}$ est impair car somme d'un nombre impair et d'un nombre pair.

Le dénominateur est un nombre pair puisque q_{2m} est pair. S_{2m+1} est le quotient d'un nombre impair par un nombre pair. Donc il en est de même de la forme irréductible. En effet, si ces entiers ne sont pas premiers entre eux, leur PGCD est impair comme le numérateur, donc la mise sous forme irréductible ne modifie pas la parité du dénominateur. La propriété est réalisée au rang suivant $n = 2m+1$

Deuxième cas : n impair au moins égal à 3. On pose alors $n = 2m-1$. On note que par construction m est un entier strictement positif.

$S_{2m} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2m-1}+\frac{1}{2m} = \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2m-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2m}\right)$ en groupant d'une part les termes de rang pair, d'autre part ceux de rang impair.

$$S_{2m} = \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2m-1}\right) + \frac{1}{2}S_m .$$

Or la somme $\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2m-1}\right)$ s'écrit sous forme d'un quotient $\dfrac{a_m}{b_m}$ dont le dénominateur impair car produit de nombres impairs (c'est un diviseur de $1\times3\times5\times...\times(2m-1)$). D'après l'hypothèse de récurrence forte, la forme irréductible $S_m = \dfrac{p_m}{q_m}$ est quotient d'un impair et d'un pair puisque le rang m est un rang antérieur à $2m$.

$S_{2m} = \dfrac{a_m}{b_m} + \dfrac{1}{2}\dfrac{p_m}{q_m} = \dfrac{2q_m\, a_m + p_m}{2b_m\, q_m}$. L'entier $2q_m\, a_m + p_m$ est impair puisque somme d'un pair et d'un impair, et l'entier $2b_m\, q_m$ est pair. Donc S_{2m} est le quotient d'un impair par un pair (pas nécessairement premiers entre eux). Il en est de même de sa forme irréductible, puisque le PGCD de

$2q_m\, a_m + p_m$ et de $2b_m\, q_m$ est impair en tant que diviseur de $2q_m\, a_m + p_m$. Le dénominateur de la forme irréductible de S_{2m} a la même parité que $2q_m$. La propriété est réalisée au rang suivant.

Ainsi, que l'entier n soit pair ou impair, si cette propriété est réalisée jusqu'au rang n, alors elle est réalisée jusqu'au rang $n+1$. Comme elle l'est au rang 2, elle est réalisée pour tout entier $n \geq 2$.

Deuxième méthode

3. La mise en produit de facteurs premiers des dénominateurs de S_n pour les 15 premières valeurs de n fait apparaître que pour tout que pour entier p tel que $0 \leq p \leq 3$ et tout entier n tel que $2^p \leq n < 2^{p+1}$, l'entier q_n est effectivement le produit du facteur 2^n et d'un nombre impair. En considérant les indices 16 et 17, on conjecture que cette propriété semble perdurer.

	A num	B sn	C denom	D	E
◆		=seq(∑(1/k,k,1,n),r	=getdenom(sn)	=factor(denom)	
1	1	1	1	1	
2	2	3/2	2	2	
3	3	11/6	6	2*3	
4	4	25/12	12	2^2*3	
5	5	137/60	60	2^2*3*5	
6	6	49/20	20	2^2*5	gilbertjulia2018
7	7	363/140	140	2^2*5*7	
8	8	761/280	280	2^3*5*7	
9	9	7129/2520	2520	2^3*3^2*5*7	
10	10	7381/2520	2520	2^3*3^2*5*7	
11	11	83711/27720	27720	2^3*3^2*5*7*11	
12	12	86021/27720	27720	2^3*3^2*5*7*11	
13	13	1145993/360360	360360	2^3*3^2*5*7*11*13	
14	14	1171733/360360	360360	2^3*3^2*5*7*11*13	
15	15	1195757/360360	360360	2^3*3^2*5*7*11*13	
16	16	2436559/720720	720720	2^4*3^2*5*7*11*13	
17	17	42142223/122522...	12252240	2^4*3^2*5*7*11*13*17	
A	num				

4. Supposons que pour un certain entier p strictement positif la propriété suivante soit vérifiée : pour tout entier n tel que $2^{p-1} \leq n < 2^p$, il existe deux entiers impairs a_n et b_n tels que : $S_n = \dfrac{a_n}{2^{p-1} \times b_n}$.

Etudions ce qu'il en est lorsque n vérifie $2^p \leq n < 2^{p+1}$.

Pour un tel entier : $S_n \underset{gjulia}{=} S_{2^p-1} + \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{2^p+1} + ... + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{a_{2^p-1}}{2^{p-1} \times b_{2^p-1}} + \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{2^p+1} + ... + \dfrac{1}{n}$

avec a_{2^p-1} ; b_{2^p-1} impairs d'après l'hypothèse de récurrence.

$S_{2^p} = S_{2^p-1} + \dfrac{1}{2^p} = \dfrac{a_{2^p-1}}{2^{p-1} \times b_{2^p-1}} + \dfrac{1}{2^p} \underset{gjulia}{=} \dfrac{2 \times a_{2^p-1} + b_{2^p-1}}{2^p \times b_{2^p-1}}$. L'entier $2 \times a_{2^p-1} + b_{2^p-1}$ est impair car somme d'un pair et d'un impair.

Il en résulte qu'il existe deux entiers impairs : $a_{2^p} = 2 \times a_{2^p-1} + b_{2^p-1}$ et $b_{2^p} = b_{2^p-1}$ tels que $S_{2^p} = \dfrac{a_{2^p}}{2^p \times b_{2^p}}$,

Le facteur 2^p apparaît au rang 2^p.

Pour tout entier n tel que $2^p < n < 2^{p+1}$: $S_n = S_{2^p} + \left(\dfrac{1}{2^p+1} + ... + \dfrac{1}{n} \right) \underset{gilbertjulia2018}{=} \dfrac{a_{2^p}}{2^p \times b_{2^p}} + \left(\dfrac{1}{2^p+1} + ... + \dfrac{1}{n} \right)$.

Or, dans la décomposition en facteurs premiers de chaque entier $2^p+1, ..., n$, l'exposant du facteur 2 est un entier $< p$ (inégalité stricte car ces entiers sont tous entre 2^p+1 et $2^p + (2^p - 1)$). La forme irréductible de $\left(\dfrac{1}{2^p+1} + ... + \dfrac{1}{n} \right)$ est de la forme $\dfrac{u_n}{2^\alpha \times v_n}$ avec u_n et v_n impairs et $\alpha < p$ (l'exposant α est le plus grand des exposants du facteur 2, exposants formant une suite finie d'entiers tous strictement inférieurs à p).

$S_n \underset{gj}{=} \dfrac{a_{2^p}}{2^p \times b_{2^p-1}} + \dfrac{u_n}{2^\alpha \times v_n} = \dfrac{a_{2^p} \times v_n \times 2^{p-\alpha} + u_n}{2^p \times b_{2^p-1} \times v_n}$.

$a_n = a_{2^p} \times v_n \times 2^{p-\alpha} + u_n$ est impair car somme d'un pair et d'un impair (utilité d'avoir justifié que $\alpha < p$),

$b_n = b_{2^p-1} \times v_n$ aussi car produit d'impairs, et $S_n = \dfrac{a_{2^p}}{2^p \times b_{2^p-1}} + \dfrac{u_n}{2^\alpha \times v_n} = \dfrac{a_n}{2^p \times b_n}$.

La propriété est vérifiée pour tous les entiers n tels que $2^p \le n \le 2^{p+1} - 1$.
L'hérédité relative à p de la propriété $_{gj}$ est établie.

Cette propriété est donc vérifiée pour tout entier p et, puisque tout entier strictement positif n est toujours entre deux puissances successives de 2, elle est vérifiée pour tout entier n.

Si S_n s'écrit ainsi, sa forme irréductible aussi puisque la réduction de $\dfrac{a_n}{2^p \times b_n}$ exploite le PGCD de a_n ; b_n, ce qui n'affecte pas le facteur 2^p.

On obtient le même résultat qu'à la question **2**.

5. Soient a et b deux entiers premiers entre eux, tel que a soit impair et b pair. Alors, quel que soit l'entier u, le nombre $a - bu$ est impair car différence d'un impair et d'un pair. En tant que nombre impair il est nécessairement non nul. On en conclut que quel que soit l'entier u : $\dfrac{a}{b} \neq u$. Le quotient d'un impair par un pair premiers entre eux n'est jamais un $_{gj}$ entier.

Les termes de rang ≥ 2 de la série harmonique ont tous cette propriété. Il n'existe aucun indice, autre que l'indice 1, tel que le nombre harmonique S_n soit entier.

NB. Une démonstration « par l'absurde » est envisageable, mais pour ma part je ne suis pas un fanatique de ce type de raisonnement que je trouve ampoulé. Chacun ses goûts.