Fractions continues et application

L'approximation d'un nombre réel par des fractions continues est un sujet souvent abordé par les manuels universitaires. Il le fut jadis par des manuels des classes de lycée de la filière C.

On peut citer par exemple l'excellent Audirac Terminale C 1983 éditions Magnard (problème 48 pages 242 et 243, affecté de deux points rouges, ce qui était pour ce manuel un critère de coriacité).

Le problème présenté ici est une variante.

1. Le sujet

Partie A : Association d'une suite de « fractions continues » à une suite d'entiers strictement positifs.

Dans toute cette partie, on se donne une suite $(y_n)_{n\in \mathbf{N}^*} = \{y_1,\ y_2,...\}$ **d'entiers strictement positifs.**

À cette suite, on associe une autre suite, notée $(r_n)_{n\in \mathbf{N}^*}$ de nombres rationnels cette fois, construite de la manière suivante :

$$r_1 = \frac{1}{y_1}\ ; \qquad r_2 = \frac{1}{y_1 + \frac{1}{y_2}} = \frac{y_2}{y_1\, y_2 + 1}\ ; \qquad r_3 = \cfrac{1}{y_1 + \cfrac{1}{y_2 + \cfrac{1}{y_3}}}$$

et plus généralement, pour tout entier n strictement positif : $r_n = \cfrac{1}{y_1 + \cfrac{1}{y_2 + \cfrac{1}{y_3 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{y_n}}}}}$.

Par souci d'économie d'écriture, on pourra si l'on veut noter respectivement : $r_1 = [y_1]$; $r_2 = [y_1\,,\ y_2]$; $r_3 = [y_1\,,\ y_2\,, y_3]$ et généralement $r_n = [y_1\,,\ y_2\,,..., y_n]$

1. Ecriture de r_n sous forme de quotient de deux nombres entiers.

On pose : $P_1 = 1$; $Q_1 = y_1$ de sorte que $r_1 = \dfrac{P_1}{Q_1}$ ainsi que $P_2 = y_2$; $Q_2 = y_1\, y_2 + 1$ de sorte que $r_2 = \dfrac{P_2}{Q_2}$.

1.1. Vérifier que : $r_3 = \dfrac{P_2\, y_3 + P_1}{Q_2\, y_3 + Q_1}$.

On est amené à poser $P_3 = P_2\, y_3 + P_1$; $Q_3 = Q_2\, y_3 + Q_1$ de sorte que $r_3 = \dfrac{P_3}{Q_3}$.

1.2. On définit deux suites d'entiers $(P_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ par les relations de récurrence :

$\begin{cases} P_1 = 1 \\ P_2 = y_2 \end{cases}$ puis $\forall n \geq 3$: $P_n = P_{n-1}\, y_n + P_{n-2}$ ainsi que $\begin{cases} Q_1 = y_1 \\ Q_2 = y_1\, y_2 + 1 \end{cases}$ puis $\forall n \geq 3$: $Q_n = Q_{n-1}\, y_n + Q_{n-2}$.

Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $r_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$

2. Etude de la suite $(Q_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$

2.1. Montrer que la suite $(Q_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est strictement croissante.

2.2. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$: $Q_{n+1} \geq 2\, Q_{n-1}$

2.3. Montrer que la suite (Q_n) diverge vers $+\infty$.

3. Ecriture de r_n sous forme de fraction irréductible.

3.1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$: $P_n\, Q_{n-1} - Q_n\, P_{n-1} = (-1)^{n-1}$.

3.2. En déduire l'écriture de r_n sous forme de quotient de deux entiers strictement positifs premiers entre eux.

4. Etude de convergence

Dans cette question, on considère les deux suites $(r_{2k})_{k\in N^*}$ et $(r_{2k+1})_{k\in N}$ de rangs respectivement pairs et impairs extraites de la suite $(r_n)_{n\in N^*}$

4.1. Soit k un entier strictement positif. Montrer que : $r_{2k} - r_{2k-1} = \dfrac{1}{Q_{2k-1}\, Q_{2k}}$

4.2. Montrer que les deux suites $(r_{2k})_{k\in N^*}$ et $(r_{2k-1})_{k\in N^*}$ sont des suites adjacentes.

4.3. En déduire que $(r_n)_{n\in N^*}$ converge. On note ξ sa limite.

5. Etude de rationalité.

5.1. Montrer que pour tout entier n strictement positif : $0 < |r_n - \xi| < \dfrac{1}{{Q_n}^2}$

5.2. Démontrer que ξ est un nombre irrationnel appartenant à l'intervalle $]0, 1[$.

Partie B : Une réciproque

On considère dans cette partie un nombre irrationnel x compris entre 0 et 1.

On se propose de construire une suite d'entiers strictement positifs $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ telle que la suite de fractions continues associées converge vers x.

On définit à cet effet (et sous réserve de légitimité) les suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ par récurrence en posant :

- D'une part : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{x} \\ \forall n\in \mathbf{N}^* : \ x_{n+1} = f(x_n) = \dfrac{1}{x_n - E(x_n)} \end{cases}$ **(1)** où E désigne la fonction partie entière.
- D'autre part : $\forall n\in \mathbf{N}^* : y_n = E(x_n) = x_n - \dfrac{1}{x_{n+1}}$ **(2)**

1. Démontrer que, pour tout entier strictement positif n, x_n est un nombre irrationnel et que sa partie entière y_n est strictement positive (ce qui légitime la construction par récurrence).

Désormais, la suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ étant une suite d'entiers strictement positifs, on considère la suite de fractions continues $\left(r_n = \dfrac{P_n}{Q_n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ qui lui est associée, telle que décrite dans la partie A.

2. Démontrer que : $\forall n \geq 3 : \dfrac{P_{n-1}x_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}x_n + Q_{n-2}} = x$

3.1. Soit n un entier ($n \geq 3$ fixé). On considère la fonction : $u \mapsto g_n(u) = \dfrac{P_{n-1}u + P_{n-2}}{Q_{n-1}u + Q_{n-2}}$ définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Etudier, suivant la valeur de l'entier n, le sens de variation de cette fonction.

3.2. En déduire, suivant la valeur de l'entier n, le signe de : $g_n(x_n) - g_n(y_n)$.

3.3. Démontrer que quel que soit l'entier strictement positif k : $r_{2k} < x < r_{2k-1}$

4. Conclure.

N.B. Ce qui est traité sur l'intervalle $]0\,;1[$ s'étend sans difficulté à tous les irrationnels. Si x est un irrationnel quelconque, $x-E(x)$ est un irrationnel de $]0\,;1[$. Il suffit d'adjoindre aux suites introduites ci-dessus, conventionnellement, un terme de rang zéro : $y_0 = E(x_0)$ qui sera, en ce qui le concerne, un entier relatif.

On déduit de cette étude le théorème de « meilleure approximation rationnelle » :

Si x est un nombre irrationnel, alors il existe une infinité de nombres rationnels $\dfrac{p}{q}$ tels que : $\left|x-\dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q^2}$

En effet, les rationnels $r_{2k} = \dfrac{P_{2k}}{Q_{2k}}$ vérifient : $0 < x - \dfrac{P_{2k}}{Q_{2k}} < \dfrac{1}{{Q_{2k}}^2}$ tandis que les rationnels $r_{2k-1} = \dfrac{P_{2k-1}}{Q_{2k-1}}$ vérifient : $0 < \dfrac{P_{2k-1}}{Q_{2k-1}} - x < \dfrac{1}{{Q_{2k-1}}^2}$.

On peut affiner ce théorème en distinguant les cas pair et impair :

Il existe une infinité de nombres rationnels $\dfrac{p}{q}$ tels que : $0 < x - \dfrac{p}{q} < \dfrac{1}{q^2}$ (i.e. tels que $0 < q\,x - p < \dfrac{1}{q}$) et il existe une infinité de nombres rationnels $\dfrac{p}{q}$ tels que : $0 < \dfrac{p}{q} - x < \dfrac{1}{q^2}$ (i.e. tels que $0 < p - q\,x < \dfrac{1}{q}$)

La partie C propose une application de ce théorème.

Partie C : Une application du théorème d'approximation rationnelle

Soit α un nombre irrationnel. On considère la suite définie pour tout entier n strictement positif par: $u_n = n\alpha - E(n\alpha)$ où E désigne la fonction partie entière. C'est-à-dire que u_n est l'unique nombre réel vérifiant à la fois : $\begin{cases} 0 < u_n < 1 \\ n\alpha \equiv u_n \mod 1 \end{cases}$ (l'égalité $u_n = 0$ ne peut jamais avoir lieu puisque $n\alpha$ est irrationnel donc distinct de sa partie entière). On se propose de démontrer le résultat suivant, à l'aide du théorème de « meilleure approximation rationnelle » :

La suite $(u_n)_{n\in N^*} = (n\alpha - E(n\alpha))_{n\in N^*}$ **est dense dans** $]0\,;1[$**.**

1.1. Soit $\dfrac{p}{q}$ un rationnel tel que $0 < q\alpha - p < \dfrac{1}{q}$.
Justifier que quel que soit l'entier strictement positif m : $m < u_q \Rightarrow u_{mq} = m u_q$

1.2. Justifier que chacun des intervalles $\left]0, \dfrac{1}{q}\right[$; $\left]\dfrac{1}{q}, \dfrac{2}{q}\right[$; $\left]\dfrac{2}{q}, \dfrac{3}{q}\right[$; ...; $\left]\dfrac{q-1}{q}, 1\right[$ contient au moins un des termes $u_q, u_{2q}, u_{3q}\dots$

2. Soit c un réel de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ et soit ε strictement positif tel que $]r-\varepsilon, r+\varepsilon[\subset]0, 1[$. Montrer que l'on peut choisir $\dfrac{p}{q}$ de façon que $]r-\varepsilon, r+\varepsilon[$ contienne au moins un des intervalles $\left]0, \dfrac{1}{q}\right[$; $\left]\dfrac{1}{q}, \dfrac{2}{q}\right[$; $\left]\dfrac{2}{q}, \dfrac{3}{q}\right[$; ...; $\left]\dfrac{q-1}{q}, 1\right[$. En déduire que $]r-\varepsilon, r+\varepsilon[$ contient au moins un terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

3. Conclure.

Partie D : Deux exemples

Cette partie propose deux exemples anecdotiques d'association de fractions continues à une suite d'entiers strictement positifs.

1. Exemple 1. On propose d'étudier le cas où la suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est la suite constante définie par :
$\forall n\in \mathbf{N}^*:\ y_n = 1$.
Quel est le nombre irrationnel dont le développement en fraction continue ne s'écrit « qu'avec des 1 » ?

On reprend les notations $r_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$ telles qu'elles ont été définies dans la partie A.

1.1. Montrer que, dans ce cas particulier, pour tout entier $n \geq 1$: $Q_n = P_{n+1}$

1.2. Montrer que si on pose $q_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $q_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, alors $P_n = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10} q_1{}^{n-1} + \dfrac{5+\sqrt{5}}{10} q_2{}^{n-1}$ et
$Q_n = \dfrac{5-3\sqrt{5}}{10} q_1{}^{n-1} + \dfrac{5+3\sqrt{5}}{10} q_2{}^{n-1}$

1.3. Montrer que : $\xi = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

2. Exemple 2.
On considère maintenant le cas où la suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est la suite définie par : $\forall n\in \mathbf{N}^*:\ y_n = n$. En utilisant un tableur, déterminer une valeur approchée de ξ à 10^{-6} près.

2. Eléments de correction

Partie A : Suite de « fractions continues » associée à une suite (infinie) d'entiers strictement positifs.

1.1. $r_3 = \dfrac{1}{y_1 + \dfrac{y_3}{y_2\, y_3 + 1}} = \dfrac{y_2\, y_3 + 1}{(y_1\, y_2 + 1)\, y_3 + y_1}$, ce qui coïncide bien avec la formule $r_3 = \dfrac{P_2\, y_3 + P_1}{Q_2\, y_3 + Q_1}$.

La relation : $r_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$ est établie aux rangs 1, 2 et 3.

1.2. $\forall n \geq 3 : r_{n+1} \underset{gilbertjulia2017}{=} \dfrac{1}{y_1 + \dfrac{1}{y_2 + \dfrac{1}{y_3 + \dfrac{1}{\ldots + \dfrac{1}{y_n + \dfrac{1}{y_{n+1}}}}}}} = \dfrac{1}{y_1 + \dfrac{1}{y_2 + \dfrac{1}{\ldots + \dfrac{1}{y_{n-1} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{y_n\, y_{n+1} + 1}{y_{n+1}}\right)}}}}}$

Les deux expressions ne diffèrent que sur les derniers étages.

Celle de gauche, c'est $[y_1\,,\ y_2\,, \ldots,\ y_{n-1},\ y_n,\ y_{n+1}]$. Celle de droite, c'est $\left[y_1\,,\ y_2\,, \ldots,\ y_{n-1},\ \left(\dfrac{y_n\, y_{n+1} + 1}{y_{n+1}}\right)\right]$.

Le dernier terme de cette dernière fraction continue, celui de rang *n*, n'est pas en général un entier strictement positif (ce n'est donc pas une « fraction continue » au sens où cette notion a été définie).
Cependant, on y reconnaît les mêmes termes que $[y_1\,,\ y_2\,, \ldots,\ y_n]$ jusqu'au terme de rang $n-1$ inclus.

Alors que $[y_1\,,\ y_2\,, \ldots,\ y_{n-1}\,,\ y_n] = \dfrac{P_n}{Q_n} = \dfrac{P_{n-1} y_n + P_{n-2}}{Q_{n-1} y_n + Q_{n-2}}$,

$\left[y_1\,,\ y_2\,, \ldots,\ y_{n-1}\,,\ \left(\dfrac{y_n\, y_{n+1} + 1}{y_{n+1}}\right)\right]_{gjulia} = \dfrac{P_{n-1}\left(\dfrac{y_n\, y_{n+1} + 1}{y_{n+1}}\right) + P_{n-2}}{Q_{n-1}\left(\dfrac{y_n\, y_{n+1} + 1}{y_{n+1}}\right) + Q_{n-2}}$ (ce qui n'est pas pour l'instant le quotient de deux entiers).

Ainsi : $r_{n+1} = \dfrac{P_{n-1}\left(\dfrac{y_n\, y_{n+1} + 1}{y_{n+1}}\right) + P_{n-2}}{Q_{n-1}\left(\dfrac{y_n\, y_{n+1} + 1}{y_{n+1}}\right) + Q_{n-2}} \underset{gj}{=} \dfrac{y_{n+1}(P_{n-1}\, y_n + P_{n-2}) + P_{n-1}}{y_{n+1}(Q_{n-1}\, y_n + Q_{n-2}) + Q_{n-1}} = \dfrac{y_{n+1}\, P_n + P_{n-1}}{y_{n+1}\, Q_n + Q_{n-1}} = \dfrac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$

La relation est établie au rang $n+1$. Elle est donc vérifiée quel que soit l'entier $n \in \mathbf{N}^*$

2. Etude de la suite $(Q_n)_{n\in \mathbf{N}^*}$

2.1 et 2.2. La suite (y_n) étant constituée d'entiers ≥ 1 : $y_1 y_2 \geq y_1$ et $y_1 y_2 + 1 > y_1$. Ainsi, $Q_2 > Q_1$.

Au rang suivant, de la relation $Q_3 = Q_2 y_3 + Q_1$ on déduit d'abord que $Q_3 \geq Q_2 + Q_1 > Q_2$ et ensuite que $Q_3 \geq Q_2 + Q_1 \geq 2\,Q_1$. Ainsi : $\begin{cases} Q_3 > Q_2 > 0 \\ Q_3 \geq 2\,Q_1 \end{cases}$

Supposons que, à un rang $n \geq 2$, on ait établi que : $\begin{cases} Q_{n+1} > Q_n > 0 \\ Q_{n+1} \geq 2\,Q_{n-1} \end{cases}$.

Alors, au rang suivant : $Q_{n+2} = Q_{n+1}\, y_{n+2} + Q_n$ et par conséquent : d'abord $Q_{n+2} \geq Q_{n+1} + Q_n > Q_{n+1} > 0$ et ensuite : $Q_{n+2} \geq Q_{n+1} + Q_n \geq 2\,Q_n$. Ainsi : $\begin{cases} Q_{n+2} > Q_{n+1} > 0 \\ Q_{n+2} \geq 2\,Q_n \end{cases}$. Les deux inégalités sont héréditaires.

Elles sont donc établies pour tout entier $n \geq 2$.

- La suite (Q_n) est strictement croissante.
- Pour tout entier $n \geq 2$: $Q_{n+1} \geq 2\,Q_{n-1}$

2.3. Cette dernière propriété implique que quel que soit l'entier naturel k : $Q_{2k+1} \geq 2^k\, Q_1 \geq 2^k$

La suite (Q_n) est une suite strictement croissante dont une suite extraite diverge vers $+\infty$, elle diverge elle-même vers $+\infty$.

3.1. En considérant les deux relations de récurrence :

$\forall n \geq 3 :\ P_n = P_{n-1}\, y_n + P_{n-2}$ ainsi que $\forall n \geq 3 :\ Q_n = Q_{n-1}\, y_n + Q_{n-2}$., on peut exprimer de deux façons y_n:

Pour tout entier $n \geq 3$: $y_n = \dfrac{P_n - P_{n-2}}{P_{n-1}} = \dfrac{Q_n - Q_{n-2}}{Q_{n-1}}$ ce qui donne :

$P_n\, Q_{n-1} - P_{n-2}\, Q_{n-1} = Q_n P_{n-1} - Q_{n-2}\, P_{n-1}$ soit : $P_n\, Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = -(P_{n-1}\, Q_{n-2} - Q_{n-1}\, P_{n-2})$

L'expression $P_n\, Q_{n-1} - Q_n P_{n-1}$ est une expression alternée qui ne prend que deux valeurs opposées.

Ces deux valeurs opposées sont déterminées par la valeur initiale, celle de $P_2\, Q_1 - P_1\, Q_2$ présente dans l'écriture de y_3 : $y_3 = P_3\, Q_2 - Q_3 P_2 = -(P_2\, Q_1 - Q_2\, P_1)$

Puisque $P_2\, Q_1 - P_1\, Q_2 = y_2\, y_1 - (y_1\, y_2 + 1) = -1$, pour tout entier $n \geq 2$: $P_n\, Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = (-1)^{n-1}$.

3.2. Il s'agit là d'une relation de Bézout, exprimant aussi bien le fait que pour tout entier $n \geq 2$ P_{n-1}, Q_{n-1} sont premiers entre eux que le fait que P_n, Q_n le sont aussi.

Pour tout entier $n \geq 1$, $r_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$ est l'écriture sous forme de fraction irréductible du rationnel r_n, quotient de deux entiers strictement positifs premiers entre eux.

4. En considérant que pour tout entier $n \geq 2$: $P_n\, Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = (-1)^{n-1}$, il est possible d'écrire aussi que pour tout entier $n \geq 2$ $\dfrac{P_n}{Q_n} - \dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \underset{gjulia2017}{=} \dfrac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1}\, Q_n}$.

Lorsque n est un entier pair, $n = 2k$: $\dfrac{P_{2k}}{Q_{2k}} - \dfrac{P_{2k-1}}{Q_{2k-1}} = -\dfrac{1}{Q_{2k-1}\, Q_{2k}}$, et donc $r_{2k} - r_{2k-1} = -\dfrac{1}{Q_{2k-1}\, Q_{2k}}$

Lorsque n est un entier impair, $n = 2k+1$: $\dfrac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} - \dfrac{P_{2k}}{Q_{2k}} = \dfrac{1}{Q_{2k}\, Q_{2k+1}}$, et donc $r_{2k+1} - r_{2k} = \dfrac{1}{Q_{2k}\, Q_{2k+1}}$

Par addition des deux égalités, k désignant un entier naturel :

$r_{2k+1} - r_{2k-1} \underset{gjulia}{=} -\dfrac{1}{Q_{2k-1}\, Q_{2k}} + \dfrac{1}{Q_{2k}\, Q_{2k+1}} = \dfrac{1}{Q_{2k}}\left(\dfrac{1}{Q_{2k+1}} - \dfrac{1}{Q_{2k-1}}\right)$. La suite (Q_n) étant strictement croissante, $\dfrac{1}{Q_{2k-1}} - \dfrac{1}{Q_{2k+1}} > 0$ et par suite : $r_{2k+1} - r_{2k-1} < 0$

La suite $(r_{2k-1})_{k \in N^*}$ est une suite strictement décroissante.

Lorsque $n = 2k+2$: $r_{2k+2} - r_{2k+1} = -\dfrac{1}{Q_{2k+1}\, Q_{2k+2}}$. Par addition de deux égalités :

$$r_{2k+2} - r_{2k} = -\frac{1}{Q_{2k+1}\, Q_{2k+2}} + \frac{1}{Q_{2k+1}\, Q_{2k}} \underset{gj}{=} \frac{1}{Q_{2k+1}}\left(\frac{1}{Q_{2k}} - \frac{1}{Q_{2k+2}}\right) > 0$$

La suite $(r_{2k})_{k \in N^*}$ est une suite strictement croissante.

En outre, la relation $|r_{2k} - r_{2k-1}| = \dfrac{1}{Q_{2k-1}\, Q_{2k}}$ et le fait que $\lim\limits_{k \to +\infty} Q_{2k} = \lim\limits_{k \to +\infty} Q_{2k-1} = +\infty$ implique que $\lim\limits_{k \to +\infty}(|r_{2k} - r_{2k-1}|) = 0$.

Les deux suites $(r_{2k})_{k \in N^*}$ et $(r_{2k-1})_{k \in N^*}$ sont des suites adjacentes.

Elles convergent vers une limite commune ξ.

On note au passage que pour tout entier k strictement positif : $r_{2k} < \xi < r_{2k-1}$

Une suite dont les termes de rangs pairs et ceux de rangs impairs convergent vers une même limite converge elle-même vers cette limite

C'est le cas de la suite (r_n) qui converge vers ξ. (On peut affirmer cela car tout terme de la suite (r_n) appartient soit à l'une soit à l'autre des deux suites extraites ; les deux suites extraites recouvrent la suite (r_n) ; on pourrait accepter qu'un *nombre fini* de termes soient non recouverts ; ici, ils le sont tous).

5.1. Supposons que n soit un entier pair, $n = 2k$: $r_{2k+1} - r_{2k} = \dfrac{1}{Q_{2k+1}\, Q_{2k}} > \xi - r_{2k} > 0$.

Vu la croissance de la suite (Q_n) : $Q_{2k+1} < Q_{2k}$ et $\dfrac{1}{{Q_{2k}}^2} > \dfrac{1}{Q_{2k+1}\, Q_{2k}} > \xi - r_{2k} > 0$

Supposons que n soit un entier impair, $n = 2k+1$: $r_{2k+1} - r_{2k+2} = \dfrac{1}{Q_{2k+2}\, Q_{2k+1}} > r_{2k+1} - \xi > 0$

Vu la croissance de la suite (Q_n) : $Q_{2k+1} < Q_{2k+2}$ et $\dfrac{1}{{Q_{2k+1}}^2} > \dfrac{1}{Q_{2k+1}\, Q_{2k+2}} > r_{2k+1} - \xi > 0$.

Quelle que soit la parité de l'entier n : $0 < |r_n - \xi| < \dfrac{1}{{Q_n}^2}$

5.2. L'appartenance de ξ à l'intervalle $]0\,,1[$ découle immédiatement de $r_2 = \dfrac{1}{y_1 + \dfrac{1}{y_2}} < \xi < \dfrac{1}{y_1} = r_1$

Supposons que ξ soit un nombre rationnel : $\xi = \dfrac{p}{q}$, quotient de deux entiers strictement positifs.

Pour tout entier n strictement positif : $0 < \left|\dfrac{P_n}{Q_n} - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{{Q_n}^2}$.

Or : $\left|\dfrac{P_n}{Q_n} - \dfrac{p}{q}\right| = \dfrac{|q\,P_n - p\,Q_n|}{q\,Q_n}$.

$|q\,P_n - p\,Q_n|$ est un entier strictement positif puisque $0 < \left|\dfrac{P_n}{Q_n} - \dfrac{p}{q}\right|$. Ainsi, $|q\,P_n - p\,Q_n| \geq 1$

Puisque la suite (Q_n) diverge vers l'infini, on peut choisir l'indice n de telle sorte que : $Q_n > q$. Un tel choix étant fait, on obtient d'une part que $\left|\dfrac{P_n}{Q_n} - \dfrac{p}{q}\right| = \dfrac{|q\,P_n - p\,Q_n|}{q\,Q_n} \geq \dfrac{1}{q\,Q_n} > \dfrac{1}{{Q_n}^2}$ alors que d'autre part on a prouvé que $0 < \left|\dfrac{P_n}{Q_n} - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{{Q_n}^2}$, ce qui est contradictoire.

La supposition $\xi = \dfrac{p}{q}$ est donc à abandonner. Nécessairement, ξ est un nombre irrationnel.

Partie B : Une réciproque

1. Vu que x est irrationnel, son inverse l'est aussi, et vu que $0<x<1$, $\frac{1}{x}>1$. Ainsi x_1 est irrationnel et sa partie entière y_1 est supérieure ou égale à 1.

Supposons que x_n soit irrationnel. Alors, $x_n - E(x_n)$ est irrationnel, différence d'un irrationnel et d'un entier. Son inverse x_{n+1} l'est aussi.

L'irrationnel x_n vérifiant les inégalités strictes : $E(x_n)<x_n<E(x_n)+1$, on en déduit $0<x_n-E(x_n)<1$ puis

$x_{n+1}=\dfrac{1}{x_n-E(x_n)}>1$. Ainsi, x_{n+1} est un irrationnel dont la partie entière y_{n+1} est supérieure ou égale à 1.

Quel que soit l'entier n strictement positif, x_n est un nombre irrationnel et sa partie entière est strictement positive.

2. Lorsque $n=3$: $\dfrac{P_2\,x_3+P_1}{Q_2\,x_3+Q_1}=\dfrac{\dfrac{P_2}{x_2-y_2}+P_1}{\dfrac{Q_2}{x_2-y_2}+Q_1}=\dfrac{P_2+P_1(x_2-y_2)}{Q_2+Q_1(x_2-y_2)}=\dfrac{y_2+(x_2-y_2)}{y_1\,y_2+1+y_1(x_2-y_2)}=\dfrac{x_2}{1+y_1x_2}$

Vu que $x_2=\dfrac{1}{x_1-y_1}$, $x_1\,x_2=y_1\,x_2+1$: $\dfrac{P_2\,x_3+P_1}{Q_2\,x_3+Q_1}=\dfrac{x_2}{x_1x_2}=\dfrac{1}{x_1}=x$

Ce qui initialise au rang 3 le relation que l'on veut établir.

De la relation de récurrence **(2)** on déduit que : $x_{n+1}=\dfrac{1}{x_n-y_n}$.

Pour tout entier $n\geq 3$:

$$\frac{P_n\,x_{n+1}+P_{n-1}}{Q_n\,x_{n+1}+Q_{n-1}}=\frac{\dfrac{P_n}{x_n-y_n}+P_{n-1}}{\dfrac{Q_n}{x_n-y_n}+Q_{n-1}}=\frac{P_n+P_{n-1}(x_n-y_n)}{Q_n+Q_{n-1}(x_n-y_n)}\underset{gjulia2017}{=}\frac{P_{n-1}x_n+\left(P_n-P_{n-1}\,y_n\right)}{Q_{n-1}\,x_n+\left(Q_n-Q_{n-1}\,y_n\right)}$$

Or : $P_n-P_{n-1}\,y_n=P_{n-2}$ et : $Q_n-Q_{n-1}\,y_n=Q_{n-2}$

Ce qui permet d'écrire $\forall n\geq 3$: $\dfrac{P_n\,x_{n+1}+P_{n-1}}{Q_n\,x_{n+1}+Q_{n-1}}=\dfrac{P_{n-1}x_n+P_{n-2}}{Q_{n-1}\,x_n+Q_{n-2}}$.

Le quotient $\dfrac{P_{n-1}x_n+P_{n-2}}{Q_{n-1}\,x_n+Q_{n-2}}$ ne dépend pas de l'entier n.

Ce quotient a, quel que soit n, la même valeur que sa valeur initiale, celle qui a été calculée pour $n=3$:
$\dfrac{P_2\,x_3+P_1}{Q_2\,x_3+Q_1}=x \Rightarrow \forall n\geq 3 : \dfrac{P_{n-1}x_n+P_{n-2}}{Q_{n-1}\,x_n+Q_{n-2}}=x$

3.1. Considérons, pour un entier strictement positif n fixé, la fonction : $u \mapsto g(u) = \dfrac{P_{n-1}\,u + P_{n-2}}{Q_{n-1}\,u + Q_{n-2}}$ définie sur $[0, +\infty[$. Sa fonction dérivée est la fonction : $g'(u) = \dfrac{P_{n-1}\,Q_{n-2} - P_{n-2}\,Q_{n-1}}{(Q_{n-1}\,u + Q_{n-2})^2} = \dfrac{(-1)^n}{(Q_{n-1}\,u + Q_{n-2})^2}$

Si n est pair, la fonction g est croissante sur $[0, 1]$. Si n est impair, elle y est décroissante.

3.2. Or, pour un entier strictement positif n fixé : $y_n = E(x_n) < x_n$

Lorsque n est pair, $n = 2k$, vu la croissance de g : $g(y_{2k}) = r_{2k} < g(x_{2k}) = x$.

Lorsque n est impair, $n = 2k - 1$, vu la décroissance de g : $g(y_{2k-1}) = r_{2k-1} > g(x_{2k-1}) = x$.

Ainsi, quel que soit l'entier k strictement positif, $r_{2k-1} > x > r_{2k}$.

4. Les suites de rangs pairs et impairs extraites de (r_n) étant adjacentes, x est la limite commune de ces deux suites. On peut conclure qu'un réel est irrationnel si et seulement si il est limite d'une suite de fractions continues associées à une suite (infinie) d'entiers strictement positifs au sens de la partie A de ce problème.

Partie C : Une application

α étant un nombre irrationnel, il existe une infinité de nombres rationnels $\dfrac{p}{q}$ tels que $\alpha - \dfrac{p}{q} < \dfrac{1}{q^2}$ c'est à dire tels que : $q\,\alpha - p < \dfrac{1}{q}$ (théorème de meilleure approximation rationnelle d'un irrationnel).

Dans un tel cas, $p = E(q\,\alpha)$ et $0 < u_q = q\,\alpha - p < \dfrac{1}{q}$.

Soit q le dénominateur d'un tel nombre rationnel.

Pour tout entier strictement positif m : $\begin{cases} m\,q\,\alpha \equiv m\,u_q \mod 1 \\ u_{m\,q} \equiv m\,q\,\alpha \mod 1 \end{cases}$.

Tant que $m\,u_q$ reste strictement inférieur à 1 (c'est-à-dire tant que $m < \dfrac{1}{u_q}$) : $m\,u_q = u_{m\,q}$ puisque ces réels sont tous deux dans $]0, 1[$ et qu'ils sont tous deux congrus modulo 1 au même nombre $m\,q\,\alpha$.

On dispose ainsi de $E\left(\dfrac{1}{u_q}\right)$ termes de la suite $(u_n)_{n\in N^*}$ régulièrement répartis dans $]0, 1[$:

$u_q,\ u_{2q} = 2u_q,\ u_{3q} = 3u_q,\ \ldots,\ u_{E(1/u_q)} = E\left(\dfrac{1}{u_q}\right) \times u_q$

Puisque $0 < u_q < \dfrac{1}{q}$, la distance entre deux consécutifs de ces termes est inférieure à $\dfrac{1}{q}$ et chacun des intervalles $\left]0, \dfrac{1}{q}\right[$; gjulia $\left]\dfrac{1}{q}, \dfrac{2}{q}\right[$; $\left]\dfrac{2}{q}, \dfrac{3}{q}\right[$; ...; $\left]\dfrac{q-1}{q}, 1\right[$ contient en contient au moins un.

Si c est un réel quelconque de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ et ε un réel strictement positif, il suffit de choisir q de telle sorte que $q > \dfrac{1}{\varepsilon}$ pour que $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$ contienne entièrement l'un des intervalles $\left]\dfrac{1}{q}, \dfrac{2}{q}\right[$; $\left]\dfrac{2}{q}, \dfrac{3}{q}\right[$; ...; $\left]\dfrac{q-2}{q}, \dfrac{q-1}{q}\right[$.

En effet, $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$ est un intervalle de longueur 2ε . Il contient donc au moins deux consécutifs des nombres $\dfrac{1}{q}, \dfrac{2}{q}, \ldots, \dfrac{q-1}{q}$ qui sont distants les uns des autres de moins de ε.

Ceci est un critère de densité de la suite $(u_n)_{n\in N^*}$. En effet, L'intervalle $]r-\varepsilon, r+\varepsilon[$ contient de ce fait au moins un des u_q, $u_{2q} = 2u_q$, $u_{3q} = 3u_q$, ..., $u_{E(1/u_q)} = E\left(\dfrac{1}{u_q}\right)\times u_q$ c'est-à-dire au moins un terme de la suite $(u_n)_{n\in N^*}$.

Partie D : Exemples.

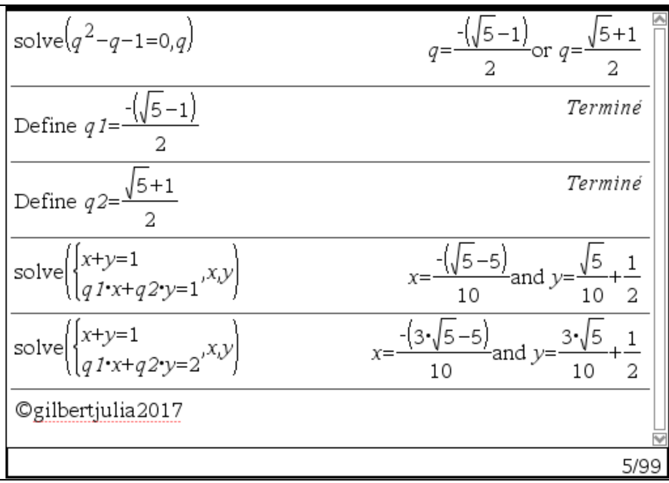
Exemple 1.

Les suites $(P_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ appartiennent à l'espace vectoriel de dimension 2 constitué par les suites réelles vérifiant la relation de $_{gj}$ récurrence : $\forall n\geq 2 : u_{n+1}-u_n-u_{n-1}=0$. (Ce sont des suites de Fibonacci).

L'équation caractéristique associée à cette relation de récurrence est l'équation : $q^2-q-1=0$ qui a deux solutions distinctes :

$$q_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } q_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Les suites $\left(q_1^{\,n-1}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $\left(q_2^{\,n-1}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ forment une base de l'espace vectoriel des suites de Fibonacci. Il existe deux réels x et y tels que, pour tout entier n : $P_n=x\,q_1^{\,n-1}+y\,q_2^{\,n-1}$ et il en est de même pour la suite $(Q_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.



Vu que $\begin{cases}P_1=1\\P_2=1\end{cases}$ et $\begin{cases}Q_1=1\\Q_2=2\end{cases}$ on obtient que : $P_n=\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}q_1^{\,n-1}+\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}q_2^{\,n-1}$ et que $Q_n=\dfrac{5-3\sqrt{5}}{10}q_1^{\,n-1}+\dfrac{5+3\sqrt{5}}{10}q_2^{\,n-1}$

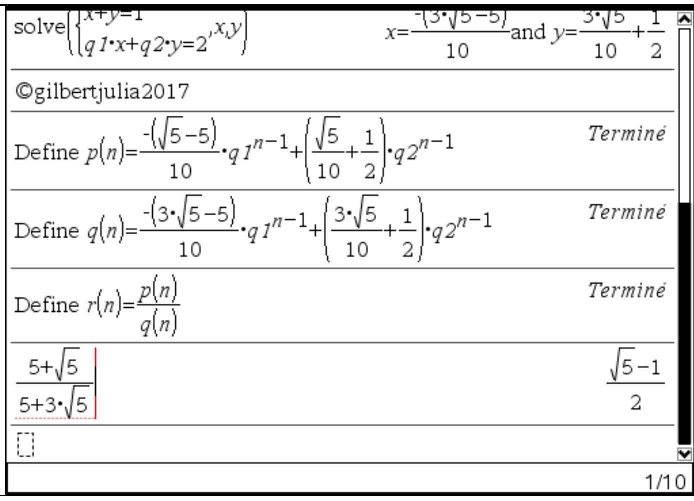
$$r_n=\frac{P_n}{Q_n}=\frac{\left(5-\sqrt{5}\right)q_1^{\,n-1}+\left(5-\sqrt{5}\right)q_2^{\,n-1}}{\left(5-3\sqrt{5}\right)q_1^{\,n-1}+\left(5+3\sqrt{5}\right)q_2^{\,n-1}}$$

ce que l'on peut écrire :

$$r_n \;{}_{gjulia2017}= \frac{\left(5-\sqrt{5}\right)\left(\dfrac{q_1}{q_2}\right)^{n-1}+\left(5-\sqrt{5}\right)}{\left(5-3\sqrt{5}\right)\left(\dfrac{q_1}{q_2}\right)^{n-1}+\left(5+3\sqrt{5}\right)},$$

ce qui fait apparaître la limite : Dans ce cas :

$$\xi=\lim_{n\to+\infty} r_n=\frac{\left(5-\sqrt{5}\right)}{\left(5+3\sqrt{5}\right)}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$



On peut établir, par exemple, que :

$$\frac{144}{233} < \frac{\sqrt{5}-1}{2} < \frac{89}{144}$$

	A	B	C	D	E
◆	=seq(n,n,1,12)	=r(a[])			
1	1	1	gilbertjulia2017		
2	2	1/2			
3	3	2/3			
4	4	3/5			
5	5	5/8			
6	6	8/13			
7	7	13/21			
8	8	21/34			
9	9	34/55			
10	10	55/89			
11	11	89/144			
12	12	144/233			

C2

Exemple 2.

Une étude sur tableur fait apparaître que : $\frac{972}{1393} < \xi < \frac{6961}{9976}$. (On choisit les deux premières fractions continues dont le dénominateur est plus grand que 1000).

Une valeur approchée décimale de ξ à 10^{-6} près est 0,697774

	A p	B q	C	D
=	=seqgen(n*u(n−	=seqgen(n*u(n−1	='p/'q	
1	1.	1.	1.	gilbertjulia2017
2	2.	3.	0.666666666667	
3	7.	10.	0.7	
4	30.	43.	0.697674418605	
5	157.	225.	0.697777777778	
6	972.	1393.	0.697774587222	
7	6961.	9976.	0.697774659182	
8	56660.	81201.	0.697774657948	
9	516901.	740785.	0.697774657964	
10	5225670.	7489051.	0.697774657964	
11	57999271.	83120346.	0.697774657964	
12	701216922.	1004933203.	0.697774657964	

C10 =0.69777465796401

Je ne connais pas quel est ce nombre irrationnel.

Voir peut-être https://www.reddit.com/r/math/comments/637s04/a_cute_continued_fraction/, où un contributeur indique que *"its I1(2)/I0(2) where I is the modified bessel function of the first kind"*.

Je laisse le soin aux spécialistes des fonctions de Bessel de nous en dire davantage ...