# Centres étrangers 1979 Terminale C : une série convergente associée à une suite croissante d'entiers

*D'après un sujet donné en 1979 dans plusieurs centres étrangers (la question* ***3*** *a été rajoutée au sujet original).*

## 1. Le sujet

On donne une suite croissante $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'entiers naturels et dont le premier terme $q_0$ est supérieur ou égal à 2.

On construit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de la façon suivante :

$$u_0 = \frac{1}{q_0}$$

$$u_1 = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0\, q_1}$$

…

$$u_n = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0\, q_1} + \ldots + \frac{1}{q_0\, q_1 \ldots q_n}$$

**1.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et peut être majorée par une suite convergente (ne dépendant par exemple que de $q_0$).

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite, qui appartient à l'intervalle ]0 ; 1]

**2.** Montrer que si la suite $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est stationnaire, c'est-à-dire s'il existe un entier $p$ tel que pour tout entier $n$ supérieur ou égal à l'entier $p$ : $q_n = q_p$, alors la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est un rationnel.

**3.** On suppose que la suite $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas stationnaire. On se propose de montrer qu'alors la limite $l$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas un rationnel.

**3.1.** Montrer que la suite $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers $+\infty$.

**3.2.** Soit $q$ un nombre entier strictement positif. On construit la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de la façon suivante :

$$v_0 = u_0 + \frac{1}{q\times q_0}$$

$$v_1 = u_1 + \frac{1}{q\times q_0\, q_1}$$

…

$$v_n = u_n + \frac{1}{q\times q_0\, q_1 ... q_n}$$

**3.2.1.** Montrer qu'il existe un rang à partir duquel la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement décroissante.

**3.2.2.** Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers la même limite $l$ que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

**3.2.3.** Montrer que le nombre réel $q\times l$ n'est pas un nombre entier. (On pourra exploiter l'encadrement $u_n < l < v_n$, qui a lieu à partir d'un certain rang).

**3.3.** Montrer que la limite commune $l$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et de la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas un rationnel.

## 2. Eléments de correction

**1.** Pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{q_0\, q_1 \dots q_n\, q_{n+1}} > 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante.

Puisque la suite $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et que son terme initial $q_0$ est $\geq 2$, pour tout entier naturel $k$ :

$$q_0\, q_1 \dots q_k \geq {q_0}^{k+1} \geq 2^{k+1} \text{ et donc } u_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < 1$$

La suite à termes positifs $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée terme à terme par la série géométrique convergente de premier terme $\dfrac{1}{2}$ et de raison $\dfrac{1}{2}$.

Etant croissante et majorée, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers une limite au moins égale à son premier terme, qui est strictement positif, et inférieure ou égale au majorant utilisé.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite, qui appartient à l'intervalle ]0 ; 1]

**2.** Supposons que la suite $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit stationnaire, c'est-à-dire qu'il existe un entier $p$ tel que pour tout entier $n$ supérieur ou égal à l'entier $p$ : $q_n = q_p$ :

Pour tout entier strictement positif $k$ :

$$u_{p+k} = u_p + \sum_{j=1}^{j=k} \frac{1}{(q_0 \dots q_p){q_p}^j} \underset{\text{gilbertjulia 2018}}{=} u_p + \frac{1}{(q_0 \dots q_p)} \sum_{j=1}^{j=k} \frac{1}{{q_p}^j} = u_p + \frac{1}{q_0 \dots q_p} \times \frac{1 - \frac{1}{{q_p}^{k+1}}}{1 - \frac{1}{q_p}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{k\to+\infty} u_{p+k} = \lim_{k\to+\infty}\left[u_p + \frac{1}{q_0 \dots q_p} \times \frac{1 - \frac{1}{{q_p}^{k+1}}}{1 - \frac{1}{q_p}}\right] = u_p + \frac{1}{q_0 \dots q_p} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{q_p}} = u_p + \frac{1}{q_0 \dots q_{p-1}(q_p - 1)}.$$

Le nombre réel $u_p + \dfrac{1}{q_0 \dots q_{p-1}(q_p - 1)}$, en tant que cocktail de rationnels, est un rationnel.

**3.** On suppose maintenant que la suite $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas stationnaire.

**3.1.** Montrons par récurrence que pour tout entier strictement positif $N$, il existe un entier $n_0$ tel que $n \geq n_0 \Rightarrow q_n \geq N$ .

Cette propriété est vérifiée lorsque $N = 0$ (il suffit de choisir $n_0 = 0$ ).

Supposons-la vérifiée pour un entier naturel $N$ : il existe un entier $n_0$ tel que $n \geq n_0 \Rightarrow q_n \geq N$ .
Puisque la suite $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas stationnaire, il existe un entier $n_1$ tel que : $q_{n_1} \neq q_{n_0}$ et en raison de la croissance de la suite $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ : $q_{n_1} > q_{n_0}$ . La suite $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant une suite d'entiers : $q_{n_1} \geq q_{n_0} + 1$
Dans ce cas : $n \geq n_1 \Rightarrow q_n \geq q_{n_1} > q_{n_0} + 1 \geq N + 1$ : il existe un entier $n_1$ tel que $n \geq n_1 \Rightarrow q_n \geq N + 1$ , la propriété est vérifiée pour l'entier $N + 1$ .
Elle l'est donc pour tout entier naturel $N$.

Ceci établi, pour tout réel strictement positif $A$, aussi grand que l'on veut, il un entier $n_0$ tel que $n \geq n_0 \Rightarrow q_n \geq E(A) + 1 \geq A$ (où $E(A)$ désigne la partie entière de $A$). Ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = +\infty$
La suite $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers plus l'infini.

**3.2.1.** Soit $q$ un entier strictement positif fixé.
Pour tout entier naturel $n$ : $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \dfrac{1}{q \times q_0 \ldots q_n\, q_{n+1}} - u_n - \dfrac{1}{q \times q_0 \ldots q_n}$ .

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{q_0 \ldots q_n\, q_{n+1}} + \frac{1}{q \times q_0 \ldots q_n\, q_{n+1}} - \frac{1}{q \times q_0 \ldots q_n} \underset{\text{gjulia 2018}}{=} \frac{q + 1 - q_{n+1}}{q \times q_0 \ldots q_n\, q_{n+1}}$$

Puisque la suite $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers plus l'infini, il existe un entier $n_q$ : $n \geq n_q \Rightarrow q_n > q + 1$
Ainsi : $n \geq n_q \Rightarrow v_{n+1} - v_n < 0$ . La suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement décroissante à partir du rang $n_q$.

**3.2.2.** Si l'on considère les suites $(u_n)_{n\geq n_q}$ et $(v_n)_{n\geq n_q}$ , l'une est strictement croissante, l'autre strictement décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{q_0 \ldots q_n} = 0$ . Ces deux suites sont adjacentes, elles ont la même limite $l$.
La suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a la même limite car un décalage de l'indexation ne modifie pas les propriétés de convergence d'une suite.

De plus pour tout entier $n \geq n_q$ , $u_n < l < v_n$

**3.2.3.** Soit $l$ la limite commune des deux suites. En raison de l'adjacence des deux suites, qui a lieu au moins à partir du rang $n_q$ : $u_n < l < v_n$.

C'est-à-dire que pour tout entier $n \geq n_q$ : $u_n < l < u_n + \dfrac{1}{q \times q_0 \dots q_n}$

Il s'ensuit que pour tout entier $n \geq n_q$ : $q \times q_0 \dots q_n \times u_n < (l\,q) \times q_0 \dots q_n < q \times q_0 \dots q_n \times u_n + 1$

Mais $u_n$ étant une somme d'inverses d'entiers qui sont tous des diviseurs de $q_0 \dots q_n$, il existe un entier $p_n$ tel que : $u_n = \dfrac{p_n}{q_0 \dots q_n}$. On obtient : $q \times p_n < (l\,q) \times p_n < q \times p_n + 1$

Le nombre $(l\,q) \times p_n$ est situé strictement entre deux entiers consécutifs, ce n'est pas un entier. Le nombre $p_n$ étant entier, si $(l\,q) \times p_n$ n'est pas un entier, c'est que $(l\,q)$ n'est pas un entier.
Quel que soit l'entier strictement positif $q$, le nombre $(l\,q)$ n'est pas un entier.

**3.3.** Si $r$ est un rationnel, alors il existe un entier strictement positif $q$ tel que $r \times q$ est un entier (il suffit de multiplier $r$ par le dénominateur positif d'une fraction, quelle qu'elle soit, qui le représente).

Par contraposition, si $x$ est un réel tel pour tout entier strictement positif $q$ le produit $q \times x$ n'est pas un entier, alors $x$ n'est pas un rationnel.

Ce qui est le cas de $l$.

**Irrationnalité du nombre e**. Dans le cas où $q_n = n + 2$ pour tout entier naturel $n$, on obtient :
$v_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2 \times 3} + \dots + \dfrac{1}{n!}$, on reconnaît une somme d'inverses de factorielles. Cette suite converge vers le réel $\mathbf{e} - 2$ (il manque les deux premiers termes pour avoir la suite classique qui converge vers **e**).

Ce qui précède permet de justifier que $\mathbf{e} - 2$ n'est pas un rationnel, donc le nombre **e** non plus.