ESD2019_3c05. Arithmétique

1. Le sujet

A. Exercice

On dispose de billets de 5€ et de billets de 20€.
De combien de façons peut-on obtenir la somme de 165€ ?

B. Les réponses de trois élèves de terminale scientifique

Élève 1
Soit x le nombre de billets de 5€ et y celui de billets de 20€. On a $5x + 20y = 165$.

Comme x et y sont des entiers positifs, on a $20y \leq 165$ donc y est compris entre 0 et 8.
Il y a donc 8 façons d'obtenir 165€.

Élève 2

J'ai utilisé un tableur pour trouver les nombres de billets de 5€ et 20€.

	A	B	C	D
1	y	20y	reste	x
2	1	20	145	29
3	2	40	125	25
4	3	60	105	21
5	4	80	85	17
6	5	100	65	13
7	6	120	45	9
8	7	140	25	5
9	8	160	5	1

Elève 3.

J'appelle x le nombre de billets de 5€ et y le nombre de billets de 20€.
Je dois donc résoudre $5x + 20y = 165$. C'est une droite, il y a une infinité de solutions.

C. Les questions à traiter devant le jury

1. Analysez les productions de ces trois élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

2. Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3. Proposez deux exercices sur le thème arithmétique, l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée.
L'un d'entre eux permettra notamment de travailler la compétence « communiquer ».
.

2. Eléments de correction

Voici le sujet d'un exercice posé au Certificat d'Etudes à Guéret, en juin 1907 :

«Un brassier achète une tourie de 15 litres de vin de Bordeaux au prix de 3 sous le litre et une dame-jeanne de 60 litres de vin de Narbonne au prix de 2 sous le litre. Quel est le montant son achat et de combien de façons pourra-t-il payer le marchand de vin sachant qu'il a dans sa bourse 40 pièces de cinq sous et 10 pièces de vingt sous ? »

Nous reconnaissons une partie de ce même exercice, cent douze ans plus tard, posé en terminale scientifique, à cela près que la loi Evin a banni à jamais le vin des problèmes de mathématiques.

1. Analyse de travaux d'élèves.

Aucun des élèves n'a donné la bonne réponse (ce qui souligne l'extrême difficulté de l'exercice).

Elève 1.

Réussites :
Cet élève a correctement mis le problème en équation (il a « modélisé »). Il a identifié que les paramètres x et y sont des entiers positifs ou nuls.
Il a clairement identifié une contrainte sur le paramètre y, en l'occurrence $0 \leq y \leq 8$

Echecs.
Cet élève n'a pas su compter de 0 à 8. On pourra lui conseiller de compter sur ses doigts.

Plus sérieusement, cet élève se contente de déterminer une *condition nécessaire* pour qu'un couple d'entiers positifs $(x,\ y)$ soit solution du problème. Il lui reste à décider si la condition $0 \leq y \leq 8$ est *suffisante* pour qu'il existe, pour chacune des valeurs de y convenables, un entier x formant avec y un couple $(x,\ y)$ solution.

Pour faire prendre conscience à cet élève d'une lacune dans sa résolution, on peut lui faire remarquer que, aussi bien, il aurait pu dire que $0 \leq 5x \leq 165$ donc que $0 \leq x \leq 33$. Pourquoi n'y a-t-il pas 34 solutions au problème (cet élève aurait dit 33, on a corrigé au passage) ?

Bougnègue.

Bougnègue ne propose aucune réponse à la question posée.

Réussite
Sa virtuosité habituelle à manipuler son tableur.

Echecs

- Il manque une ligne à son tableur, la ligne « $y = 0$ ». S'il avait donné une réponse, il aurait commis la même erreur que l'élève 1.
- Il ne donne aucune interprétation de son tableau.

Il faut faire comprendre à Bougnègue que, en l'état, son tableur n'est qu'un tableau de nombres sans aucune signification concrète. Il appartient à Bougnègue de tirer des conclusions de son travail et de le synthétiser. Il manque dans sa production au moins une « phrase réponse ». Il n'appartient en aucun cas au lecteur de tirer des conclusions et de faire une synthèse.

Elève 3.

Réussite (partielle) :
Cet élève a tenté, comme l'élève 1, de mettre le problème en équation (il a tenté de « modéliser »).

Echecs

- Il n'a pas identifié que les paramètres x et y sont des entiers positifs ou nuls, ce qui est rédhibitoire.
- En affirmant « *c'est une droite* », cet élève confond l'objet algébrique « équation » avec l'objet géométrique « ensemble des points du plan repéré dont les coordonnées vérifient l'équation ».

Il faudrait attirer l'attention de cet élève sur la nature des paramètres x et y. Est-ce que ce sont des nombres réels quelconques ?

En résumé, la compétence « communiquer » (sic) n'est pas maîtrisée par les deux premiers élèves (l'un oublie une réciproque l'autre ne fait aucune synthèse de son travail) et le troisième ne se donne pas l'occasion de la mettre en œuvre. La recherche de midi à quatorze heures s'avère dévastatrice.

2. Correction de l'exercice

La correction Guéret 1907.

Le brassier doit payer $15\times 3+60\times 2=165$ sous.

Il peut donner au marchand de vin au maximum 8 pièces de vingt sous, parmi les 10 pièces de vingt sous qu'il a dans sa bourse, en complétant son paiement avec une pièce de 5 sous.

Puisqu'il a 40 pièces de cinq sous, il peut échanger parmi ces 8 pièces de vingt sous autant de pièces qu'il veut, chacune contre 4 pièces de cinq sous, pour obtenir exactement le même montant. Le brassier a donc huit autres possibilités pour obtenir le même montant de 165 sous. En tout, le brassier peut payer le marchand de vin de 9 façons différentes.

À mon sens, l'exercice tel qu'il nous est présenté ce jour par le jury du CAPES aurait un intérêt si, après l'avoir résolu arithmétiquement avec les humbles outils de l'école primaire, on proposait aux élèves de trouver d'autres méthodes de résolution. Style : « J'en conviens, cet exercice, au niveau de votre classe de terminale S, est un tantinet stupide, mais il va quand même nous permettre de tester des méthodes ».

On mettrait ainsi en lumière d'abord le type de problème abordé : il se ramène à la résolution dans l'ensemble **N×N** d'une équation diophantienne linéaire à deux inconnues avec second membre de type $a\,x+b\,y=c$, en l'occurrence l'équation $5\,x+20\,y=165$ où x et y représentent respectivement les nombres de billets de 5 et de 20 euros à utiliser. Cette équation est équivalente à l'équation $x+4\,y=33$.

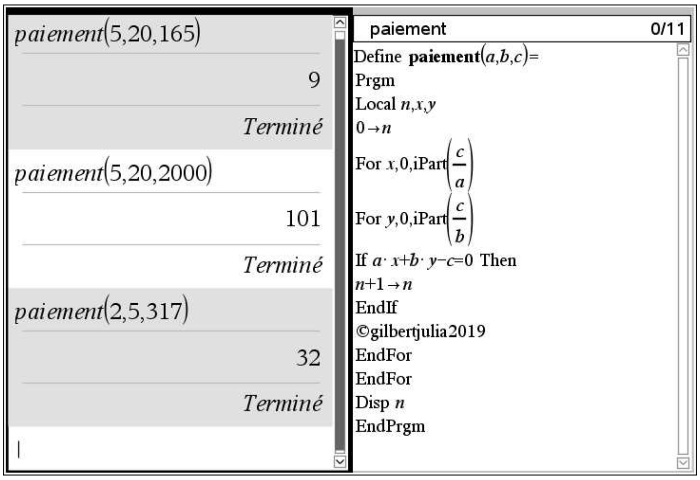
Viendrait ensuite un inventaire de méthodes permettant la résolution de ce type d'équation :

1. Méthode classique : Le couple $(1\ ;\ 8)$ étant solution particulière évidente, les couples solutions dans Z×Z sont les couples de la forme $(1+4\,k\ ;\ 8-k)$ où k appartient à **Z** et il faut dénombrer ceux qui appartiennent à **N×N**.
2. Résolution graphique : il s'agit de déterminer les points à coordonnées entières naturelles de la droite d'équation $x+4\,y=33$. Certainement la moins performante des trois méthodes retenues ici.
3. Résolution à l'aide d'un algorithme. Les couples solutions appartiennent au domaine $0\leq x\leq 33$; $0\leq y<9$ qui ne contient qu'un *nombre fini* de couples d'entiers. Un algorithme peut déterminer *exhaustivement* quels sont, parmi ces couples, ceux qui vérifient l'équation.

Il va de soi qu'un candidat se doit d'aborder cet exercice sous cet angle. Il lui appartient, une fois le type de problème correctement caractérisé, de choisir une résolution niveau « terminale scientifique », tout en s'efforçant de garder son sérieux. Une solution extatique « python » serait sans nul doute seyante à ravir (?) et, j'imagine, fort bien accueillie par un jury, voir ci-dessous.

On a tout intérêt à prévoir en prolongement un changement possible de la constante c (que se passe-t-il si on remplace 165 par un autre nombre ?), prolongement qui renforcerait le crédit des solutions 1 et 3.

Il en est ainsi de l'algorithme ci-contre qui prend en charge un changement des paramètres a, b, c.



3. Commentaire et « pour aller plus loin »

Je trouve ce sujet très représentatif de l'état de l'enseignement des mathématiques. Dans la conception actuelle de l'apprentissage, les « situations » permettant ce prétendu apprentissage sont assez fréquemment adaptables à l'éducation des poissons rouges (ce dont ces derniers sont peut-être reconnaissants), nous en avons un exemple frappant aujourd'hui au niveau d'une terminale scientifique.

Dans un tel cas, l'enseignant se doit de redoubler de vigilance pour apporter par lui-même un brin de contenu mathématique.

Pour aujourd'hui, je vous propose le brin suivant :

Soient a, b, c trois entiers strictement positifs. On suppose en outre que a et b sont premiers entre eux.

On considère l'équation diophantienne : $a\,x + b\,y = c$ **(1)**.

Quelle différence y a-t-il dans l'utilisation d'un algorithme suivant que l'on envisage une résolution de cette équation dans l'ensemble **N×N** ou bien une résolution de cette même équation dans l'ensemble **Z×Z** ?

3.1. Résolution par un algorithme dans l'ensemble N×N

Désignons par E la fonction « partie entière » et considérons les entiers $E\left(\dfrac{c}{a}\right)$ et $E\left(\dfrac{c}{b}\right)$

Ces entiers vérifient : $E\left(\dfrac{c}{a}\right) \le \dfrac{c}{a} < E\left(\dfrac{c}{a}\right)+1$ et : $E\left(\dfrac{c}{b}\right) \le \dfrac{c}{b} < E\left(\dfrac{c}{b}\right)+1$.

Pour tout entier x tel que $x \ge E\left(\dfrac{c}{a}\right)+1$, $a\,x \ge a\,E\left(\dfrac{c}{a}\right)+a \ge c+a > c$.

Pour tout entier y tel que $y \ge E\left(\dfrac{c}{b}\right)+1$, $b\,y \ge b\,E\left(\dfrac{c}{b}\right)+b \ge c+b > c$.

.

Il en résulte que pour tout couple d'entiers positifs $(x\ ;\ y)$tel que $x \geq E\left(\frac{c}{a}\right)+1$ ou bien : $y \geq E\left(\frac{c}{b}\right)+1$, $a\,x+by>c$.

Ainsi, l'équation **(1)** n'a aucune solution en dehors de l'ensemble $\left\{0\ ;\ 1\ ;...;E\left(\frac{c}{a}\right)\right\}\times\left\{0\ ;\ 1\ ;...;E\left(\frac{c}{b}\right)\right\}$

Cet ensemble est un ensemble fini.

Si nous écrivons un algorithme capable de vérifier si un couple d'entiers est ou non solution de **(1)**, testant *tous les couples* de cet ensemble et listant ceux d'entre eux qui sont solution, alors nous aurons, en extension, l'ensemble de tous les couples qui sont solutions de l'équation **(1)**. La liste affichée par l'algorithme fait foi, c'est une preuve.

3.2. Utilisation d'un algorithme dans l'ensemble Z×Z

Considérons ce même algorithme, capable d'explorer un sous-ensemble fini de **Z×Z** donné, et d'en extraire tous les couples solutions de **(1)**.

Aussi grand qu'il soit, l'ensemble exploré par l'algorithme ne contient qu'un nombre fini de solutions. Supposons qu'il en contienne au moins une $(x_0\ ;\ y_0)$. Les autres solutions éventuellement repérées doivent en principe toutes se présenter sous la forme $(x_0+k\,b;\ y_0-k\,a)$ où k est un entier relatif prenant un nombre fini de valeurs.

Nous pouvons éventuellement *conjecturer* que l'ensemble des solutions de **(1)** est l'ensemble des couples de la forme : $(x_0+k\,b;\ y_0-k\,a)$ où k est un entier relatif quelconque. Cependant, cela n'est qu'une conjecture, il reste à démontrer par un raisonnement indépendant de l'algorithme que ce qui est exact pour un nombre fini de valeurs de k a une portée universelle.

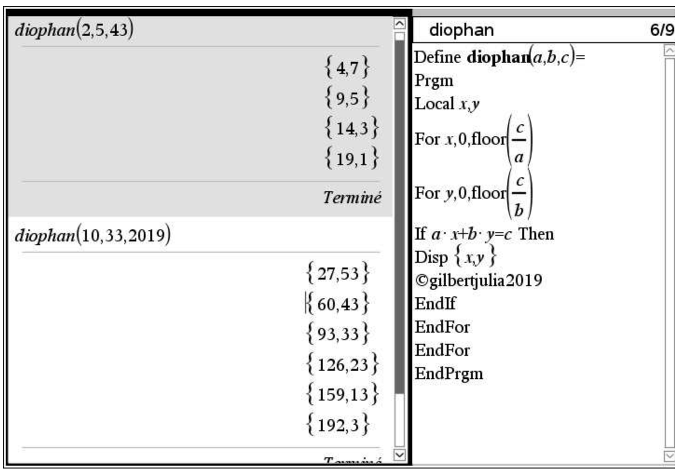
Un algorithme ne peut pas *détermine*r quel est l'ensemble des solutions de **(1)** dans l'ensemble **Z×Z**, il ne peut qu'aider à émettre une conjecture sur sa nature.

3.3. Conclusion

Alors que les résultats affichés par l'algorithme ont un statut de preuve lors de la résolution dans l'ensemble **N×N**, ils n'ont qu'un statut de conjecture lors de la résolution dans l'ensemble **Z×Z**.

Résolution complète à l'aide de l'algorithme **diophan** dans l'ensemble **N×N** de l'équation $2\,x+5\,y=43$ puis de l'équation $10\,x+33\,y=2019$. Tous les couples solutions sont affichés, il n'y en a aucun autre .

En revanche, nous pouvons par exemple seulement *conjecturer* que l'ensemble des solutions entières relatives de l'équation $2\,x+5\,y=43$ est l'ensemble des couples de la forme : $(4+5k\ ;\ 7-2k)$; $k \in \mathbf{Z}$. Encore reste-t-il à le démontrer …



4. Et python dans tout ça ?

Soit à résoudre dans **N×N** une équation diophantienne de la forme $a\,x + b\,y = c$ avec l'aide d'un algorithme « python ». Il s'agit de chercher les solutions dans un domaine dont on est certain qu'il les contient toutes.

Voici deux méthodes différentes qui pourraient à mon sens convenir (?), reste à les tester… Je laisse au lecteur le soi d'examiner, dans chaque cas, quel est le domaine de **N×N** exploré par l'algorithme.

Prêter attention aux indentations. Dans les deux cas, les algorithmes affichent les solutions découvertes puis, en fin de programme, le nombre de ces solutions.

4.1. Avec deux boucles « for »

```
from math import floor
a=int(input("Quel est le coefficient a de x ?"))
b=int(input("Quel est le coefficient b de y ?"))
c=int(input("Quel est le coefficient c ?"))
n=0
for x in range (0,floor(c/a)+1):
    for y in range(0,floor(c/b)+1):
        if a*x+b*y==c :
            n+=1
            print(x,y)
print(n)
```

4.2. Avec une boucle « while » imbriquée dans une boucle « for »

```
from math import floor
a=int(input("Quel est le coefficient a de x ?"))
b=int(input("Quel est le coefficient b de y ?"))
c=int(input("Quel est le coefficient c ?"))
n=0
for x in range (0,floor(c/a)+1):
    y=0
    while a*x+b*y<c:
        y+=1
        if a*x+b*y==c:
            n+=1
            print(x,y)
print(n)
```