

ESD2019_3c02. Conjecture et démonstration

1. Le sujet

A. Exercice

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = u_n + 4n - 6$ pour tout entier naturel n .
Conjecturer une expression de u_n en fonction de n et démontrer cette conjecture.

B. Les réponses de deux élèves de terminale scientifique.

Elève 1.

J'ai utilisé le tableur pour calculer de u_0 jusqu' à u_{10} . Je vois que le diagramme obtenu correspond à une parabole. En considérant le sommet de la parabole, je vois que $\alpha = 2$; $\beta = -3$ donc je fais l'hypothèse que

$$u_n = (n - 2)^2 - 3.$$

J'ai essayé de le prouver par récurrence mais je n'arrive pas à prouver l'hérédité et je ne sais pas pourquoi ça ne marche pas.

Elève 2.

D'après l'énoncé, on peut écrire que $u_{n+1} - u_n = 4n - 6$. Donc la suite $u_{n+1} - u_n$ est une suite arithmétique de raison 4. Donc si on ajoute les termes de la suite, on obtient

$$u_{n+1} - u_0 = (n+1) \frac{-6 + 4n - 6}{2} = 2n^2 - 4n - 6$$

Je peux en déduire que $u_n = 2(n+1)^2 - 4(n+1) - 6 = 2n^2 - 3$

2. Éléments de correction

Voici un exercice qui illustre bien le thème « conjecture et démonstration ». Aucune conjecture n'est précisée dans l'énoncé, il appartient aux élèves de proposer leur propre conjecture puis d'en tester la pertinence par confrontation à la cohérence d'une démonstration.

L'exercice réinvestit la notion de « somme des termes d'une suite arithmétique ».

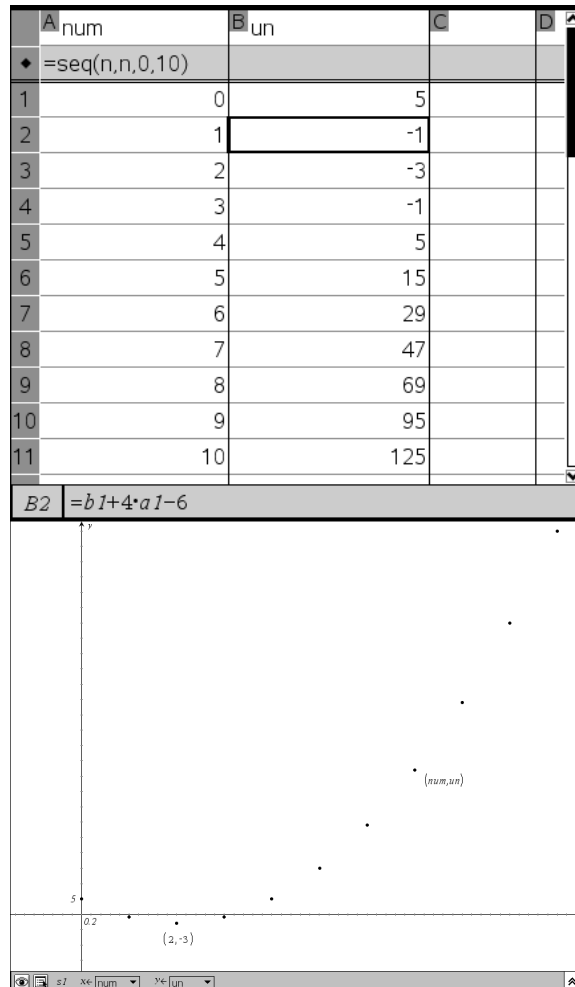
Il apparaît intéressant, avant de procéder à une analyse des travaux d'élèves, de faire soi-même quelques conjectures. Le calcul des trois ou quatre premiers termes « à la main » permet de tester la fiabilité de résultats plus nombreux obtenus à l'aide d'un tableur.

Le terme initial est : $u_0 = 5$ et la relation de récurrence est : $u_{n+1} = u_n + 4n - 6$.

Successivement : $u_1 = 5 + 4 \times 0 - 6 = -1$ puis
 $u_2 = -1 + 4 \times 1 - 6 = -3$ puis
 $u_3 = -3 + 4 \times 2 - 6 = -1$

La formule de récurrence a été écrite en cellule **B2**, puis elle a été tirée vers le bas. Les premiers résultats obtenus sont concordants avec ceux calculés à la main.

Le nuage de points (n, u_n) semble être un nuage parabolique.



1. Analyse de travaux d'élèves.

Bougnègue.

Réussites

Bougnègue a manifestement obtenu les valeurs correctes des termes u_0 jusqu' à u_{10} . Il a utilisé à bon escient son tableur pour tabuler les premières valeurs d'une suite, et représenter le nuage de points qui en résultait.

Bien que l'on n'ait aucune information sur la façon dont il s'y prend pour « prouver l'hérédité », sa mise en œuvre d'une démonstration par récurrence montre qu'il en connaît le principe et les rouages.

Echecs.

Bougnègue a appliqué le théorème en acte¹ suivant : « Si une parabole a pour sommet le point de coordonnées (α, β) , alors cette parabole a pour équation l'équation : $y = (x - \alpha)^2 + \beta$ ». Il y a fort à parier que, si la concavité de ladite parabole avait été « tournée vers le bas », il aurait donné : $y = -(x - \alpha)^2 + \beta$. Il n'a donc pas tenu compte de la présence d'un éventuel coefficient multiplicatif : $y = k(x - \alpha)^2 + \beta$, et c'est cela qu'il faudrait faire apparaître.

Bien que Bougnègue se rende compte d'une incohérence dans sa démarche, cette prise de conscience ne l'amène pas à remettre en cause sa conjecture.

Pour lui faire prendre conscience de son erreur, il faudrait d'abord lui demander si, dans sa démonstration par récurrence, il a bien contrôlé l'hypothèse d'initialisation. Il est probable qu'il n'a pas pris la peine de la vérifier (selon lui, cela allait de soi ...): « Vérifie quand même si la formule que tu proposes donne bien $u_0 = 5$ ».

On peut ensuite lui faire représenter graphiquement la parabole d'équation $y = (x - 2)^2 - 3$ dans le même repère que son « diagramme » (corriger au passage son vocabulaire, c'est un *nuage de points* qu'il a représenté). Cette parabole, et celle qui semble supporter le nuage de points, ont même sommet, même axe, mais non la même ouverture. Pourquoi ?

Elève 2.

Réussites

La production de cet élève est très intéressante car il s'engage dans une démarche que l'on pourra faire aboutir. Il reconnaît que lorsque l'expression du terme général d'une suite est une fonction affine, alors cette suite est arithmétique. Il démontre implicitement, sur un exemple, que lorsque la suite des différences est arithmétique alors la suite elle-même est du second degré en n .

Il fait preuve de savoirs (reconnaissance d'une suite arithmétique, expression de la somme des termes d'une suite arithmétique) et, partiellement, de savoir-faire (employer une suite arithmétique auxiliaire pour obtenir l'expression du terme général d'une suite).

¹ Un « théorème en acte », ou « théorème-élève » est un énoncé jugé vrai par l'élève, qui donne des résultats exacts dans certaines circonstances, mais dont l'application se révèle fautive dans la généralité. Par exemple « Pour multiplier par 9, on met la somme des chiffres au milieu » est un théorème en acte.

Echecs

Cet élève échoue à synchroniser l'expression du terme de rang n avec le rang lui-même. Il a peut-être pensé que, vu qu'il obtenait une expression du terme de rang $(n+1)$, il devait substituer $(n+1)$ à n pour obtenir l'expression exacte².

Un autre échec est que cet élève ne vérifie pas ses résultats, alors qu'il serait en mesure de le faire (est-ce que la formule qu'il propose fournit la valeur correcte de u_0 ?)

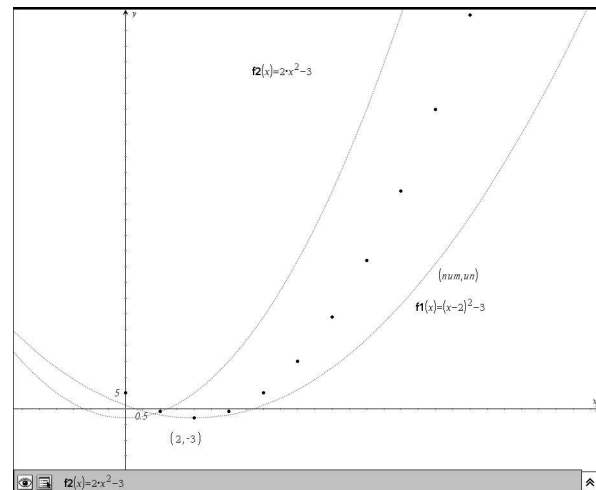
Pour faire prendre conscience à cet élève de son erreur, il est possible d'utiliser le tableur de l'élève 1, en y ajoutant une colonne affichant les valeurs de la suite définie par : $v_n = 2n^2 - 3$, proposée par l'élève 2. On observe un décalage entre les valeurs de cette suite et les valeurs attendues. Une conjecture apparaît : $v_n = u_{n+2}$. Pourquoi ce décalage d'indexation ?

	B	C	D	E
• n,0,10)		=2*num^2-3		
1	0	5	-3	
2	1	-1	-1	
3	2	-3	5	
4	3	-1	15	
5	4	5	29	
6	5	15	47	
7	6	29	69	
8	7	47	95	
9	8	69	125	
10	9	95	159	
11	10	125	197	

2. Correction de l'exercice

Si l'on représente graphiquement les deux paraboles associées aux expressions conjecturées par les deux élèves, on met en évidence leur lien avec la parabole P qui supporte le nuage de points. L'une se déduit de P par une affinité de rapport $\frac{1}{2}$ (celle de l'élève 1) et l'autre se déduit de P par une translation (celle de l'élève 2).

Il reste à confronter les deux expressions et à en tirer un « compromis », qui permettrait de conjecturer une expression plus plausible.



Chacun des deux élèves nous propose ainsi une piste de résolution. Bougnègue nous oriente vers une démonstration par récurrence, une fois sa conjecture corrigée, et l'élève 2 nous oriente vers une démonstration directe, exploitant une somme télescopique.

Si l'on suit la démarche de l'élève 2, on peut faire remarquer qu'il est maladroit d'envisager la suite des différences jusqu'au terme $u_{n+1} - u_n$, il est préférable de s'arrêter un rang plus tôt. On fait remarquer également que l'élève 2 a utilisé, certes à bon escient, la formule : $\sum_{k=0}^n v_k = (n+1) \frac{v_0 + v_n}{2}$ qui n'est pas la plus facile à retenir.

² Cette erreur est de même nature que celle qui consiste à penser que la représentation graphique d'une fonction $x \mapsto f(x+a)$ se déduit de la représentation graphique de la fonction $x \mapsto f(x)$ par la translation de vecteur $+a\vec{i}$

Ecrivons les n premières différences de deux termes consécutifs :

$$\begin{cases} u_1 - u_0 = -6 \\ u_2 - u_1 = 4 \times 1 - 6 \\ \dots \\ u_n - u_{n-1} = 4 \times (n-1) - 6 \end{cases}$$

Par addition membre à membre de ces n relations : $u_n - u_0 = -6n + 4 \times (1 + 2 + \dots + (n-1))$.

On fait rappeler la formule donnant la somme des $(n-1)$ premiers entiers : $1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$.

On obtient : $u_n - 5 = -6n + 4 \times \frac{n(n-1)}{2}$, c'est-à-dire : $u_n = 5 - 6n + 2n(n-1) = 2n^2 - 8n + 5$

3. Pour aller plus loin

1. On rappelle que l'ensemble des suites arithmétiques est l'ensemble des suites dont l'expression du terme général est une fonction affine de n . En effet, si (u_n) est la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r , alors pour tout entier naturel n , l'expression du terme de rang n est : $u_n = u_0 + nr$ et réciproquement, si l'expression du terme de rang n d'une suite (u_n) est une fonction affine de n : $u_n = an + b$, alors pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = a$, la différence de deux termes consécutifs est une constante.

Mais qu'en est-il des suites (u_n) dont la suite des différences est une suite arithmétique ? C'est-à-dire des suites (u_n) telles qu'il existe deux réels a et b vérifiant pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = an + b$?

L'élève 2 nous oriente vers une réponse :

$$u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (ak + b) = nb + a = nb + a \sum_{k=0}^{n-1} 1 = nb + a \frac{n(n-1)}{2}$$

Nous obtenons : $u_n = \frac{a}{2}n^2 + \left(b - \frac{a}{2}\right)n + u_0$. L'expression du terme général est une expression du second degré en n .

Réciproquement, si l'expression du terme général u_n est une expression du second degré en n : $u_n = an^2 + bn + c$, alors pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = 2an + (a+b)$. L'expression du terme général de la suite des différences est une fonction affine de n , cette suite est arithmétique.

4. Commentaire

Aujourd'hui, on ne peut que saluer le choix des « productions d'élèves » proposées à la sagacité des candidats. D'une part, Bougnègue est allé au-delà d'un trop récurrent simple constat et s'est engagé dans une tentative pour prouver sa conjecture (saluons cet effort). D'autre part, l'élève 2 amorce une autre méthode de résolution. Il y a cette fois suffisamment de matériau pertinent pour documenter une analyse.

5. Exercices complémentaires

Le thème « conjecture et démonstration » est souvent abordé dans les sujets d'oral 2. On trouvera plusieurs sujets, dans des domaines divers, dans la rubrique « Divers raisonnements ... » du classement par thèmes.

Quant à la compétence « modéliser », voir (entre autres sources) REDCM pages 123 et 188.