ESD2019_20 : Raisonnement

1. Le sujet

A. Exercice

À tout réel m, on associe la droite D_m d'équation : $(2m-1)x+(5-m)y-4m-7=0$

1. Montrer qu'il existe un point K appartenant à toutes les droites D_m.

2.a. Déterminer m pour que D_m passe par le point $A(1;\ 1)$.
2.b. Si on se donne un point P du plan, existe-t-il toujours un nombre réel m tel que D_m passe par le point P ?

B. Les réponses de deux élèves de première S

Élève 1
Avec un logiciel de géométrie, j'ai construit la figure avec un curseur pour le paramètre m. En faisant varier m, je vois que :
1. *Toutes les droites D_m passent par le point K(3;2).*
2.a. *Avec $m=-1$, D_m passe par le point A.*
2.b. *Quand m varie, la droite D_m balaie tout le plan donc on peut atteindre tous les points du plan.*

Élève 2

1. *Si $m=0$, la droite D_0 a pour équation $-x+5y-7=0$.*
Si $m=5$, la droite D_5 a pour équation $9x-27=0$.
Les coordonnées du point d'intersection des deux droites vérifient le système $\begin{cases}-x+5y-7=0\\9x-27=0\end{cases}$, $\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$
Donc toutes les droites D_m passent par le point K(3;2).

2. (a) *On remplace les coordonnées de A dans l'équation D_m et on obtient* $m=-1$
(b) *Si on fait comme dans la question précédente, on obtient une valeur de m donc il existe toujours un nombre m tel que D_m passe par le point P.*

C. Les questions à traiter devant le jury

1. Analyser la réponse des deux élèves en mettant en évidence leurs réussites ainsi que leurs erreurs.
Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

2. Proposer une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première S.

3. Proposer deux exercices, un au niveau lycée et un au niveau collège, qui illustrent différents types de raisonnements utilisés en mathématiques.

2. Eléments de correction

L'exercice porte sur l'étude d'un faisceau de droites, dont les équations sont combinaisons linéaires des équations de deux droites sécantes du plan affine. Cependant, le faisceau des droites étudié ici n'est pas l'ensemble de toutes les droites dont une équation est combinaison linéaire des deux équations de base, il en manque une ; les deux droites particulières n'ont pas le même statut dans la fabrication de ces combinaisons linéaires.
Ce qui va générer pour les élèves quelques difficultés.

Bien que l'étude des droites dont une équation dépend d'un paramètre ne soit pas un objectif ciblé du programme de première S, un tel exercice a un sens dès lors que l'on veut faire travailler les élèves sur la qualité des raisonnements, et, au sein de ces raisonnements, sur l'emploi pertinent de quantificateurs. Ce qui explique le classement de cet exercice de géométrie affine dans un thème « raisonnements ».

1. Analyse de travaux d'élèves.

Les deux élèves, par des méthodes différentes, ont les mêmes réussites mais pas tout à fait les mêmes erreurs.

Chouquerouste
Chouquerouste « constate ». Sa réponse à la question **1** est une affirmation gratuite (irrecevable). Sa réponse à la question **2.a** est exacte et correcte, et sa réponse à la question **2.b** est une *conjecture* (irrecevable car cette réponse n'a pas un statut de preuve).

L'accompagnement principal me semblerait porter sur sa réponse à la question **1**. Peut-il dire que « plusieurs » droites passent par *K*, « beaucoup » de droites passent par *K* ou « toutes » les droites passent par *K* ? Peut-il être sûr que la droite de paramètre $\sqrt{\pi^{29}+2019}$ passe par *K* ? On peut attirer son attention sur le fait que le curseur m décrit un intervalle $[m_1, m_2]$ et que, en outre, ce curseur décrit cet intervalle « pas à pas ». Le logiciel ne considère donc qu'un nombre fini de droites D_m.

Pour ses réponses aux autres questions, on verra.

Elève 2
Sa réponse à la question **1** est incomplète, sa réponse à la question **2.a** est exacte et correcte, et sa réponse à la question **2.b** est une affirmation gratuite (irrecevable).
Plus précisément, cet élève démontre dans sa réponse à la question **1** que, si toutes les droites passent par un même point, alors ce point ne peut être que le point *K* (ce point est le « seul candidat »). Dans la question **2.b**, sa réponse a un statut d'allégation (ce n'est ni un statut de conjecture, ni un statut de preuve).

Deux accompagnements sembleraient utiles : sur la question **1**, en quoi le fait que deux droites passent par *K* impliquerait-il qu'une autre droite y passerait aussi, et sur la question **2.b** proposer à cet élève de mettre à exécution son intention.

2. Correction de l'exercice

Question 1. Cette question porte sur le sens du quantificateur universel « quel que soit ». Si on reprend la démarche de l'élève 2, on note que deux droites distinctes *particulières* passent par $K\ (3\ ;\ 2)$. Il est possible que d'autres élèves aient choisi d'autres droites D_m pour arriver à la même conclusion. Ainsi, « plusieurs » ou même « beaucoup » de droites D_m passent par K. Est-ce que cela veut dire « toutes » ? Non, il faut établir « qu'il n'existe pas une droite D_m qui ne passe pas par K ».
Or, *quel que soit* le réel m : $(2m-1)\times 3+(5-m)\times 2-4m-7=6m-3+10-2m-4m-7=0\times m+0$.
Ainsi, *quel que soit* le réel m, les coordonnées du point K vérifient l'équation de la droite D_m.

Question 2.a.
Pour tout réel m : $(2m-1)\times 1+(5-m)\times 1-4m-7=-3m-3$
Le point A appartient à la droite D_m si et seulement si : $-3m-3=0$, c'est-à-dire si et seulement si $m=-1$.
Ce point A appartient à une et à une seule des droites D_m, la droite D_{-1}

Question 2.b.
Qu'en est-il pour un point P quelconque ? On convient d'une notation pour ses coordonnées, par exemple $P\ (x_P\ ;\ y_P)$.
Si « *on fait comme dans la question précédente* » comme le dit l'élève 2 :

Pour tout réel m : $(2m-1)\times x_P+(5-m)\times y_P-4m-7=m(2x_P-y_P-4)-x_P+5y_P-7$

Nous obtenons une expression du premier degré (au plus) en m. Est-ce que l'on « obtenir une valeur de m » et si oui laquelle ? On se rend compte que, s'il en existe une, c'est $m=\dfrac{x_P-5y_P+7}{(2x_P-y_P-4)}$, encore faut-il que cette expression ait un sens, on ne peut pas effectuer la division par $(2x_P-y_P-4)$ sans précaution.

Nous sommes amenés à engager une juteuse *discussion* :

- Si $2x_P-y_P-4\neq 0$, alors il existe une et une seule droite D_m passant par P, c'est la droite de paramètre $m=\dfrac{x_P-5y_P+7}{(2x_P-y_P-4)}$
- Si $2x_P-y_P-4=0$ et si $-x_P+5y_P-7=0$, alors toutes les droites D_m passent par P (nous retrouvons ce bon vieux point K …).
- Si $2x_P-y_P-4=0$ et si $-x_P+5y_P-7\neq 0$, alors aucune des droites D_m ne passe par P.

On peut revenir maintenant sur l'écriture de l'équation cartésienne de la droite D_m : cette équation s'écrit aussi bien $m(2x-y-4)-x+5y-7=0$, c'est-à-dire qu'elle a été fabriquée en combinant linéairement les équations de deux droites particulières, la droite D_0 d'équation $-x+5y-7=0$ et la droite, que l'on peut noter D_∞, d'équation $2x-y-4=0$.

Les droites D_m ainsi obtenues sont des droites qui, toutes, passent par le point d'intersection de D_0 et D_∞ (c'est le point K).

Elles « balaient le plan », en effet, mais pas complètement car aucune des droites D_m ne se confond avec la droite D_∞. C'est pourquoi nous avons trouvé des points, ceux de cette droite D_∞ qui sont distincts de K justement, qui n'appartiennent à aucune des droites D_m.