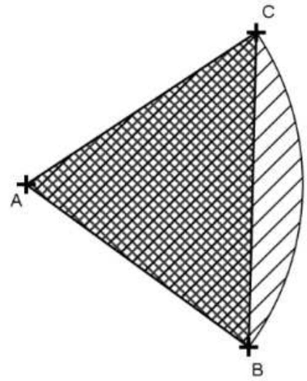
# ESD2019_19. Problèmes conduisant à l'étude de fonctions

## 1. Le sujet

### A. Exercice

La figure ci-contre représente une portion d'un disque de centre $A$ et de rayon 1. On fait varier la mesure en radian de l'angle $\widehat{BAC}$ dans l'intervalle $[0,\pi]$
Déterminer un encadrement d'amplitude $10^{-3}$ d'une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ pour laquelle il y a égalité des aires de la surface hachurée et de la surface quadrillée.




### B. Les réponses de deux élèves de terminale scientifique.

**Elève 1.**

*J'ai posé* $\widehat{BAC}=\alpha$ *donc l'aire de ABC est* $\dfrac{B\times h}{2}=\sin\dfrac{\alpha}{2}.\cos\dfrac{\alpha}{2}$

*L'aire du secteur hachuré est égale à l'aire de la portion de disque privé de l'aire du triangle ABC.*

*Je résous l'équation* $\dfrac{\alpha}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2}.\cos\dfrac{\alpha}{2}=\sin\dfrac{\alpha}{2}.\cos\dfrac{\alpha}{2}$. *Je pose*

$f(\alpha)=2\sin\dfrac{\alpha}{2}.\cos\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\alpha}{2}$

.

*Avec ma calculatrice graphique, je trouve une solution entre* $\dfrac{\pi}{2}$ *et* $\pi$.

*J'ai écrit un programme en langage python. Il retourne* $a=3{,}14082566319585$ *et* $b=3{,}141592653589793$

```
from math import sin, cos, pi
def f(x):
    return 2*sin(x/2)*cos(x/2)-x/2
def dicho():
    a = pi/2
    b = pi
    while b-a>=0.001:
        m = (a+b)/2
        if f(m)<0:
            a = m
        else
            b = m
    return a,b
```

**Elève 2.**

*J'ai posé* $x=\dfrac{\widehat{BAC}}{2}$. *Donc l'aire de ABC est* $\sin x.\cos x$ *et l'aire du secteur hachuré est* $x-\sin x.\cos x$

*Je résous l'équation* $x-2\sin x.\cos x=0$

*J'étudie la fonction f définie par* $f(x)=x-2\sin x.\cos x=x-\sin(2x)$ *donc* $f'(x)=1-\cos(2x)$.

*Comme la dérivée est positive, f est strictement croissante. D'après le théorème de bijection il y a une unique solution*

## C. Les questions à traiter devant le jury

**1.** Analyser la réponse des deux élèves en mettant en évidence leurs réussites ainsi que leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

**2.** Présenter une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

**3.** Proposer deux exercices sur le thème *problèmes conduisant à l'étude de fonctions*, l'un au moins permettant de développer la compétence « modéliser ».

## 2. Eléments de correction

Voici un problème qui conduit à la *résolution d'une équation*, en l'occurrence une équation de la forme $f(x)=0$. C'est parce qu'il ne nous est pas possible de résoudre algébriquement l'équation à laquelle nous sommes conduits que ce problème conduit ensuite à une étude de fonction. Aussi, son classement dans le thème du jour est un peu surprenant.

L'énoncé est de plus rédigé de manière déconcertante (peut-être délibérément ?).

En effet, l'énoncé semble admettre d'emblée *l'existence* et *l'unicité* d'une mesure en radian de l'angle $\widehat{BAC}$ dans l'intervalle $[0, \pi]$ telle que l'égalité des aires soit satisfaite. Mais qu'est-ce qui nous le prouve ? C'est justement pour prouver cette existence et cette unicité que l'étude d'une fonction est utile.

Ensuite, cette existence et cette unicité étant établies, il existe des méthodes (relatives à une résolution approchée d'une équation type $f(x)=0$) permettant d'obtenir une valeur approchée avec une précision déterminée de la mesure recherchée, mais qui ont peu à voir avec une étude de fonction.

Abordons donc l'exercice avec une certaine prudence et réservons-nous le droit d'émettre une critique feutrée sur la tournure de l'énoncé.

L'énoncé prend le soin de suggérer fortement le paramètre permettant de décrire la situation et de préciser pour ce paramètre un intervalle d'étude. Ces tâches incombent en principe à la personne qui modélise, disons que le travail est quelque peu mâché. Mais cette remarque n'est pas une critique, c'est juste un choix de l'auteur de l'énoncé.

### 1. Analyse de travaux d'élèves.

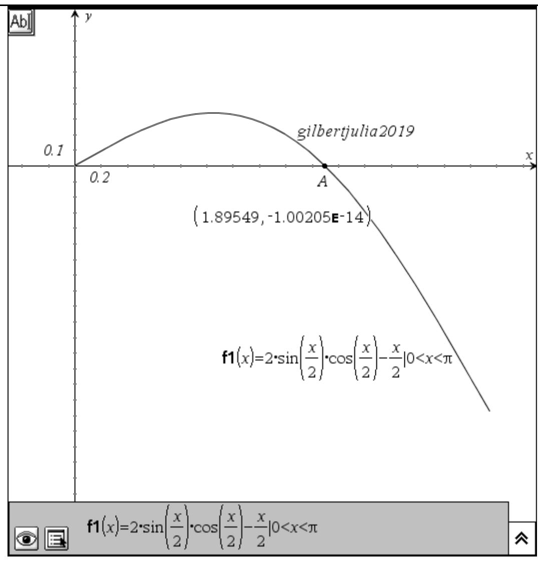
**Escartefigue.**

*Réussites :*
Escartefigue suit en tout point la consigne de l'énoncé :

Il se ramène à la résolution d'une équation.

Il « trouve une solution entre $\frac{\pi}{2}$ et $\pi$ ». L'énoncé ne lui demandant pas d'en justifier l'existence, il répond en cela convenablement à la consigne.

Cette trouvaille lui permet de mettre en place un algorithme de dichotomie avec un test d'arrêt pour déterminer un encadrement de cette solution.
Sa démarche est donc correcte.




*Echecs.*
On relève une erreur dans l'écriture du programme python. La condition « If $f(m)<0$ » est incorrecte (l'inégalité est de mauvais sens). Elle conviendrait pour une fonction croissante sur l'intervalle sur lequel on applique la méthode de dichotomie, mais non pour une fonction strictement décroissante. Cette erreur a pour conséquence que le milieu de l'intervalle $m$ remplace toujours la borne $a$. De ce fait, l'affichage final est celui des premières décimales du nombre Pi et celui des premières décimales du nombre $\pi\left(1-2^{-12}\right)$.

Il est possible que cet élève applique un programme de dichotomie sans s'être posé la question sur la condition : dans quel cas $m$ remplace-t-il $a$, dans quel cas remplace-t-il $b$ ?

L'accompagnement que l'on peut proposer est d'attirer l'attention sur les deux brochettes de décimales. Est-ce pertinent qu'elles soient aussi longues que des brochettes d'agneau sur un barbecue ? Ne reconnaît-on pas les premières décimales d'un nombre célèbre ? Est-ce cohérent avec ce que laissait présager la calculatrice graphique ?
Il s'agira de remettre en cause son critère de choix.

**Elève 2.**

Cet élève a cru bon de prendre un autre paramètre que celui conseillé par l'énoncé pour décrire la situation. Libre à lui.

*Réussite*
L'objectif de cet élève est de répondre à une question que l'énoncé ne posait pas, à savoir l'existence d'une solution. Cet objectif est à classer dans les « réussites » et non dans les « hors-sujet » car en effet, avant de tenter de déterminer un nombre ayant certaines propriétés, il est bienvenu de justifier son existence.
Il fait référence au « théorème de la bijection »

*Echecs*
- Sa référence, louable, au « théorème de la bijection » est incomplète car il ne justifie pas toutes les hypothèses du théorème. D'une part il ne cite pas sur quel intervalle il l'applique, et d'autre part il ne justifie pas pourquoi zéro est une valeur intermédiaire.
- Cet élève ne répond pas à la consigne qui était de déterminer un encadrement de la solution dont il a tenté de justifier l'existence.

Chacun des deux points mérite un « accompagnement ». D'abord s'assurer que *toutes* les hypothèses du « théorème de la bijection » sont satisfaites (l'énoncer …). Ensuite lui demander de trouver un moyen pour obtenir un encadrement d'amplitude déterminée de la solution (comment son théorème peut-il s'itérer sur des intervalles de plus petite longueur ?).

**2. Correction de l'exercice**

Il s'agit d'abord de montrer en quoi le problème posé a un rapport avec une fonction.
Suivons la directive de l'énoncé qui nous conseille de choisir comme paramètre « la mesure en radian de l'angle $B\hat{A}C$ dans l'intervalle $[0, \pi]$ ». Soit $x$ (plutôt que alpha) cette mesure.

On peut calculer l'aire du triangle $ABC$ de deux façons. Comme ont tenté de le faire les deux élèves, mais aussi il s'agit d'un triangle de côté 1 et de hauteur correspondante $\sin x$, son aire est égale à $\frac{1}{2}\sin x$.

L'aire du secteur circulaire étant égale à $\frac{x}{2}$, les deux aires en question sont égales si et seulement si :

$\frac{1}{2}\sin x = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x$ c'est-à-dire si et seulement si : $\frac{x}{2} - \sin x = 0$
Nous ne savons pas résoudre algébriquement cette équation. Tout espoir de trouver une valeur « exacte » doit être abandonné. Comment savoir d'ailleurs si cette équation a une solution autre que la solution triviale $x = 0$ ?

C'est en cela que réside le lien avec « l'étude d'une fonction ». En étudiant les variations sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ de la fonction $x \mapsto f(x) = \frac{x}{2} - \sin x$, nous allons pouvoir déterminer l'existence sur $[0\,;\pi]$ et le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Une étude des variations de cette fonction fait apparaître que *f* est strictement décroissante sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{3}\right]$ puis strictement croissante sur $\left[\frac{\pi}{3}\ ;\ \pi\right]$. Le fait que $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ soit strictement négatif et qu'il en est de même de $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - 1$ et que d'autre part $f(\pi)$ soit strictement positif permet de réunir toutes les hypothèses du corollaire le plus utilisé du « théorème de la bijection » :

- *f* est continue sur $\left[\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$ (car dérivable sur cet intervalle).
- *f* est strictement monotone (strictement croissante) sur $\left[\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$.
- $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $f(\pi)$ sont de signes contraires.

L'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$

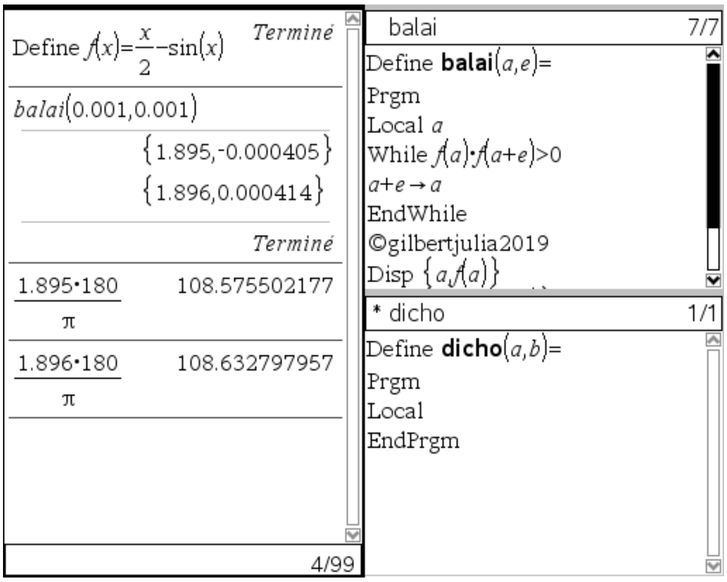
(Alors qu'elle n'en admet aucune autre que la solution triviale sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$)

C'est ce que l'énoncé admettait et que, me semble-t-il, il fallait quand même justifier.

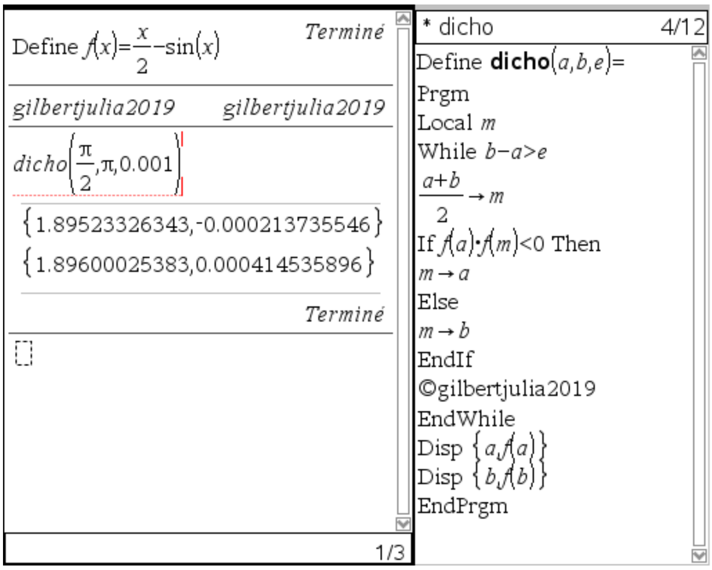
Soit $a$ la mesure de l'angle, exprimée en radians, recherchée.

Un programme de balayage donne l'encadrement $1{,}895 < a < 1{,}896$.

On a affiché des valeurs approchées de la mesure des angles encadrants en degrés, ce qui est plus « parlant » : il y a égalité des aires pour une mesure particulière d'angle comprise entre 108 et 109 degrés.



Un programme de dichotomie donne l'encadrement $1{,}8952 < \alpha < 1{,}8961$




## 3. Commentaire

Comme nous venons de voir, c'est bien pour établir l'existence et l'unicité d'une solution dans un certain intervalle que nous avons exploité l'étude d'une fonction.

Une fois cette solution localisée, c'est un vulgaire algorithme qui prend le relais, et cela quelle que soit la fonction $f$ (que nous avons définie à part dans chacun des deux algorithmes que nous avons écrits ci-dessus).

Il y a fort à parier que, si un candidat proposait ce même exercice dans le thème « problèmes conduisant à l'étude d'une fonction » il y aurait un membre du jury qui aurait posé la question « est-ce que ce problème conduit à une fonction ou bien est-ce qu'il conduit à une équation ? ».

Les exercices-jury du concours du CAPES doivent toujours être considérés avec un certain recul. S'il en est de très intéressants, en revanche quelques autres sont à considérer avec précaution soit à cause de leur (peu de) pertinence, soit plus rarement parce que, comme celui-ci, ils ne sont pas exactement dans le thème auxquels ils font référence. Les annales du concours ne sont pas le meilleur réservoir d'exercices personnels.