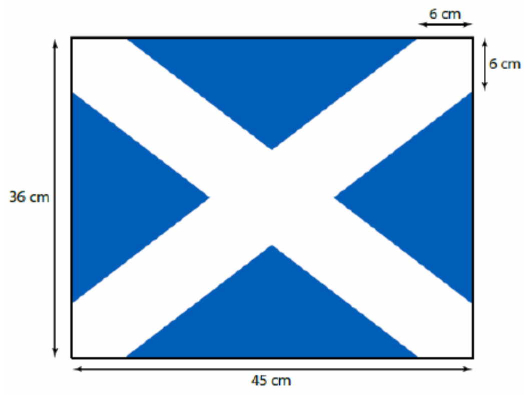
ESD2019_16 : Géométrie plane

1. Le sujet

A. Exercice



Le drapeau écossais est constitué d'une croix de Saint-André blanche sur fond bleu.

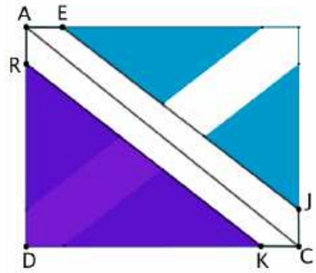
La figure ci-contre est un schéma du drapeau avec les cotes utiles à son dessin.

Quelle est l'aire de la partie blanche du drapeau ?

B. Les réponses de deux élèves à la première question

Élève 1
À l'aide d'un logiciel de géométrie, j'ai reproduit la figure. Je trouve que la croix blanche a une aire de 834,6 cm^2.

Élève 2
Je commence par calculer l'aire d'une demi-bande blanche diagonale, en traçant la diagonale du grand rectangle.



L'aire du demi-rectangle est $\dfrac{36\times 45}{2}=810\ cm^2$.
L'aire du triangle RDK est $\dfrac{(36-6)\times(45-6)}{2}=585\ cm^2$
L'aire de la bande RAEJCKR est $2\times(810-585)=450\ cm^2$.
L'aire de la croix blanche vaut donc le double, soit 900 cm^2.

Élève 3
Les bords de la croix sont parallèles aux diagonales du drapeau, l'angle μ *qu'elles forment avec le côté gauche vérifie donc* $\tan\mu=\dfrac{45}{36}$ *et je trouve* $\mu\approx 51{,}34°$

L'aire du triangle bleu de gauche vaut alors $(36-6-6)\dfrac{36-6-6}{2}\times\cos\mu\approx 180\ cm^2$ *alors que l'aire du triangle du bas vaut* $(45-6-6)\dfrac{45-6-6}{2}\times\cos\mu\approx 340\ \ cm^2$.
Au total, l'aire de la croix blanche vaut $36\times 45-2\times 180-2\times 340\approx 580\ cm^2$.

C. Les questions à traiter devant le jury

1. Analyser la réponse des trois élèves en mettant en évidence leurs réussites ainsi que leurs erreurs. Vous préciserez les aides que vous pourriez leur apporter.

2. Proposer une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de troisième.

3. Présenter deux exercices sur le thème *Géométrie plane*, l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée. L'un des exercices devra notamment permettre de travailler la compétence « raisonner ».

2. Eléments de correction

Voici un sujet portant sur le calcul de grandeurs géométriques, en l'occurrence ici un calcul d'aires, et que l'on peut présenter aux élèves de plusieurs façons.

- Si on recherche la valeur exacte de cette aire, alors il s'agit d'un sujet qui relève plutôt d'un challenge mathématique. Très peu d'élèves d'une classe de troisième ordinaire y parviendront sans aide. Il faudra donc prévoir, en étant optimiste, une résolution de l'exercice par étapes successives.
- Si cet exercice est traité à l'aide d'un logiciel de géométrie, je veux bien admettre à la rigueur que cet exercice favorise un apprentissage du fonctionnement du logiciel, mais qu'en est-il du contenu mathématique ?

1. Analyse de travaux d'élèves.

Chouquerouste
À quoi sert de proposer aux candidats une « production d'élève » d'opérette ?

Elève 2
Réussite
Un point important dans sa production : cet élève a codé la figure. Le drapeau est passé du statut de dessin à celui d'une authentique figure de géométrie.
Cet élève a perçu les propriétés de symétrie de la figure. Il serait toutefois intéressant de savoir quelle propriété de symétrie cet élève a exploité. C'est l'invariance globale par la symétrie centrale de centre O qui permet de justifier que le drapeau peut être partagé en deux demi-drapeaux d'aires égales.

Echec
Cet élève n'a pas perçu que les deux bandes blanches avaient une partie commune et que l'aire d'un losange central était comptée deux fois.
On lui fera remarquer que calculer une aire par découpage d'une figure en figures plus simples est une méthode efficace à condition que le découpage présente une partition (pas de superposition !) de la figure initiale.

Elève 3
Réussite
Certes, sa démarche est plombée dès le départ par une erreur rédhibitoire. Cependant, une « réussite » de cet élève est l'idée qu'il est plus facile de calculer l'aire de la partie bleue que celle de la croix blanche. Cette idée sera reprise dans la correction.

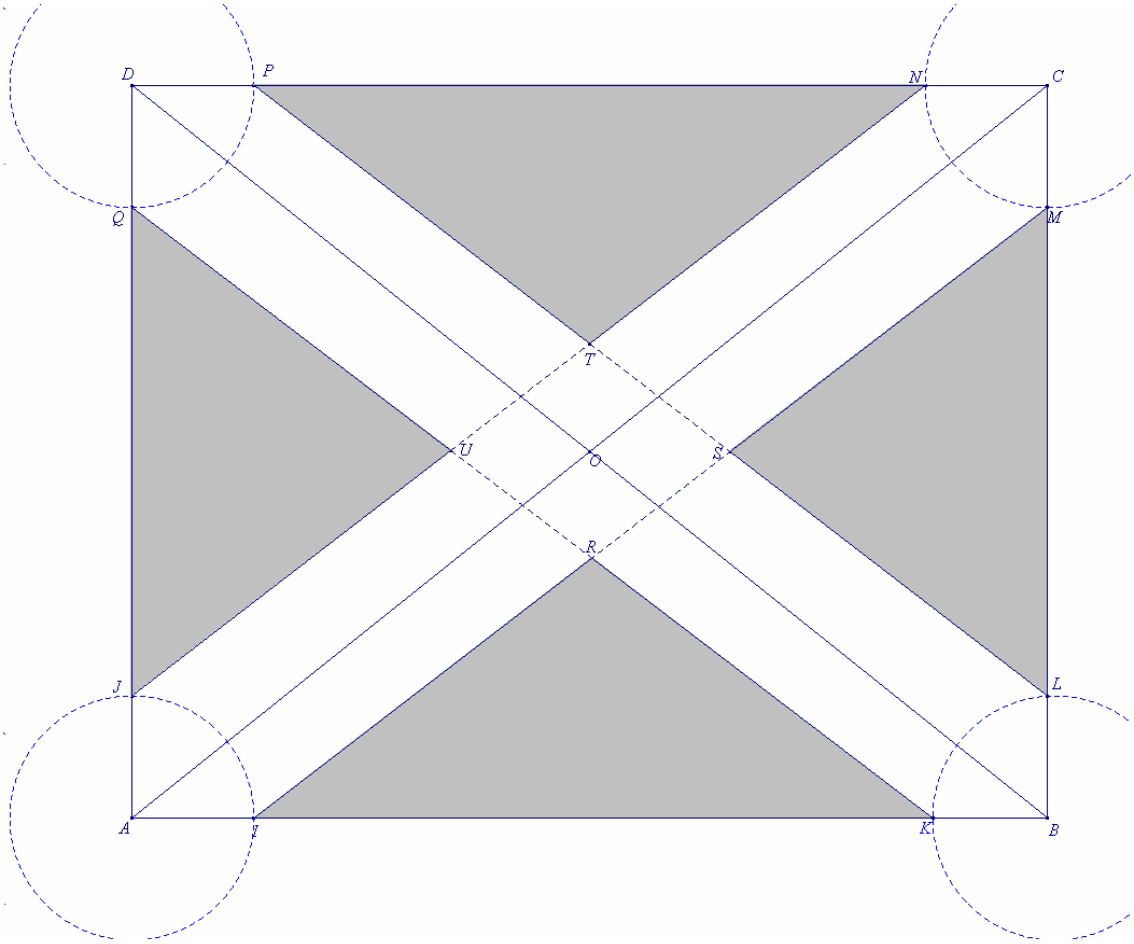
Echecs
Cet élève part d'un constat apparent sur le dessin qu'il incorpore aux hypothèses. Il s'appuie peut-être sur un théorème élève qui s'énoncerait ainsi : « Si sur les côtés d'un rectangle on place des points à une même distance des sommets, alors on obtient des segments deux à deux parallèles aux diagonales ». Ce « théorème » est vrai si le rectangle est un carré, mais il est faux pour un rectangle quelconque.

On note que, contrairement à l'élève 2, cet élève n'a pas codé la figure, il parle d'un « triangle de gauche » et d'un « triangle du bas ». (On peut lui demander de commencer par baptiser les points utiles).

Sa production est intéressante en ce sens que l'enseignant peut l'exploiter pour distinguer « ce que l'on conjecture » et « ce que l'on démontre ». Selon cet élève, « les bords de la croix sont parallèles aux diagonales ». Est-ce une hypothèse ? Non, aucune trace nulle part. Donc, « ça se démontre » (ou pas …).
Le fait que $\dfrac{BM}{BC} \neq \dfrac{BI}{BA}$ (suivant codage ci-dessous) est tout de même très préoccupant pour les partisans du parallélisme … On pourra attirer l'attention de cet élève sur cette bien contrariante non-égalité !

2. Correction de l'exercice

C1. Commencer par transformer le dessin du drapeau en une figure de géométrie en codant la figure et en . faisant apparaître des traits de construction utiles. Le codage va permettre de référencer chaque objet géométrique de la figure.



C2. Analyser les propriétés de la figure :
Quels en sont les éléments de symétrie ? Le centre O du rectangle est un centre de symétrie du drapeau et les deux droites passant par O et parallèles aux côtés, qui sont axes de symétrie du rectangle, sont aussi des axes de symétrie du drapeau (justifier).

Quelles configurations peut-on remarquer ? IKR et NTP sont deux triangles isocèles isométriques et il en est de même des triangles MSL et JUQ (justifier). Les droites (IM) et (JN) sont parallèles de même que (LP) et (KQ) (justifier).

Une conjecture pose problème : Est-ce que les droites (IM) et (JN) de même que (LP) et (KQ) sont parallèles aux diagonales ? Il convient de débattre. Peut-être que le logiciel de Chouquerouste pourra trancher : qui a raison entre les partisans du parallélisme et ceux du non parallélisme ?

C3. Définir une stratégie : ou bien on trouve un moyen pour calculer directement l'aire des bandes blanches ou bien on calcule l'aire de la partie bleue et on en déduit l'aire blanche par complémentarité. Cette deuxième stratégie (défendue par l'élève 3) semble plus prometteuse, car la partie bleue est une réunion de triangles, alors que la partie blanche est un polygone plus complexe.

La question sera résolue si on parvient à déterminer l'aire des deux triangles isocèles JUQ et IKR. On peut en calculer facilement la longueur des bases, $JQ = 36 - 12 = 24$ et $IK = 45 - 12 = 33$.

C4. En revanche, on ne connaît pas leur hauteur, il faut la calculer.

Hauteur du triangle JUQ

Soit H le pied de la hauteur issue de U du triangle JUQ. Ce point est (pourquoi ?) le milieu commun de [JQ] et de [AD]. Si on considère le triangle AKQ rectangle en A, la droite (UH) étant perpendiculaire à (AQ) est parallèle à (AK). On peut appliquer le théorème de Thalès (avec les rapports des troisièmes côtés) dans ce triangle : $\frac{HU}{AK}=\frac{QH}{QA}$ c'est-à-dire $\frac{HU}{39}=\frac{12}{30}$. Donc : $HU=\frac{78}{5}=15{,}6$

Hauteur du triangle IKR

Soit G le pied de la hauteur issue de R du triangle IKR. par un raisonnement analogue au précédent, dans le même triangle AKQ : $\frac{GR}{AQ}=\frac{KG}{KA}$ c'est-à-dire $\frac{GR}{30}=\frac{16{,}5}{39}$. Donc : $GR=\frac{165}{13}$

Aires des triangles

Aire de JUQ : $\frac{1}{2}\times 24\times\frac{78}{5}=\frac{936}{5}=187{,}2$

Aire de IKR : $\frac{1}{2}\times 33\times\frac{165}{13}=\frac{5445}{26}=209{,}4$ à 0,1 près.

C5. *Résolution de la question :*

L'aire de la partie bleue du drapeau est égale à la somme des aires de deux triangles isométriques à JQU et de deux triangles isométriques à IKR. Cette aire est égale à : $2\times\frac{936}{5}+2\times\frac{5445}{26}=\frac{51561}{65}=793{,}2$ à 0,1 près

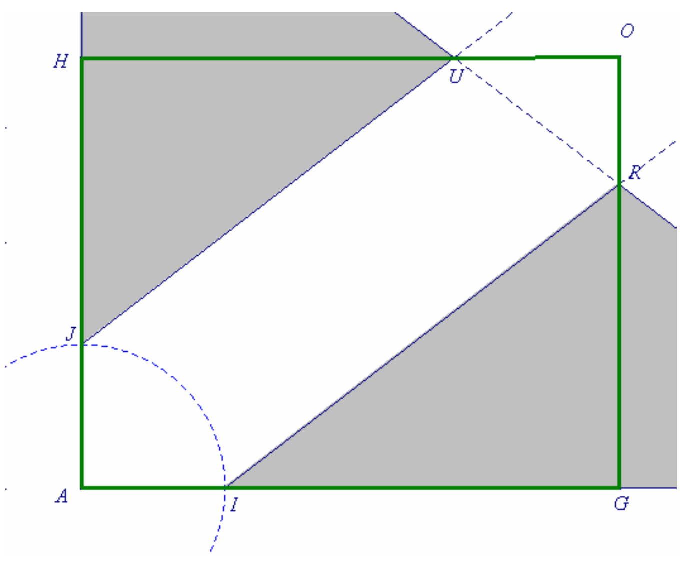
L'aire totale du drapeau étant égale à $36\times 45=1620$, l'aire de la partie blanche est égale à $1620-\frac{51561}{65}=\frac{53739}{65}$ cm^2 soit 826,8 cm^2 à 0,1 cm^2 près.

Les propriétés de symétrie peuvent être encore mieux exploitées : le drapeau peut en effet être partagé en quatre rectangles isométriques constitués de deux triangles rectangles bleus séparés par une bande blanche (le rectangle $AGOH$ est l'un d'eux).

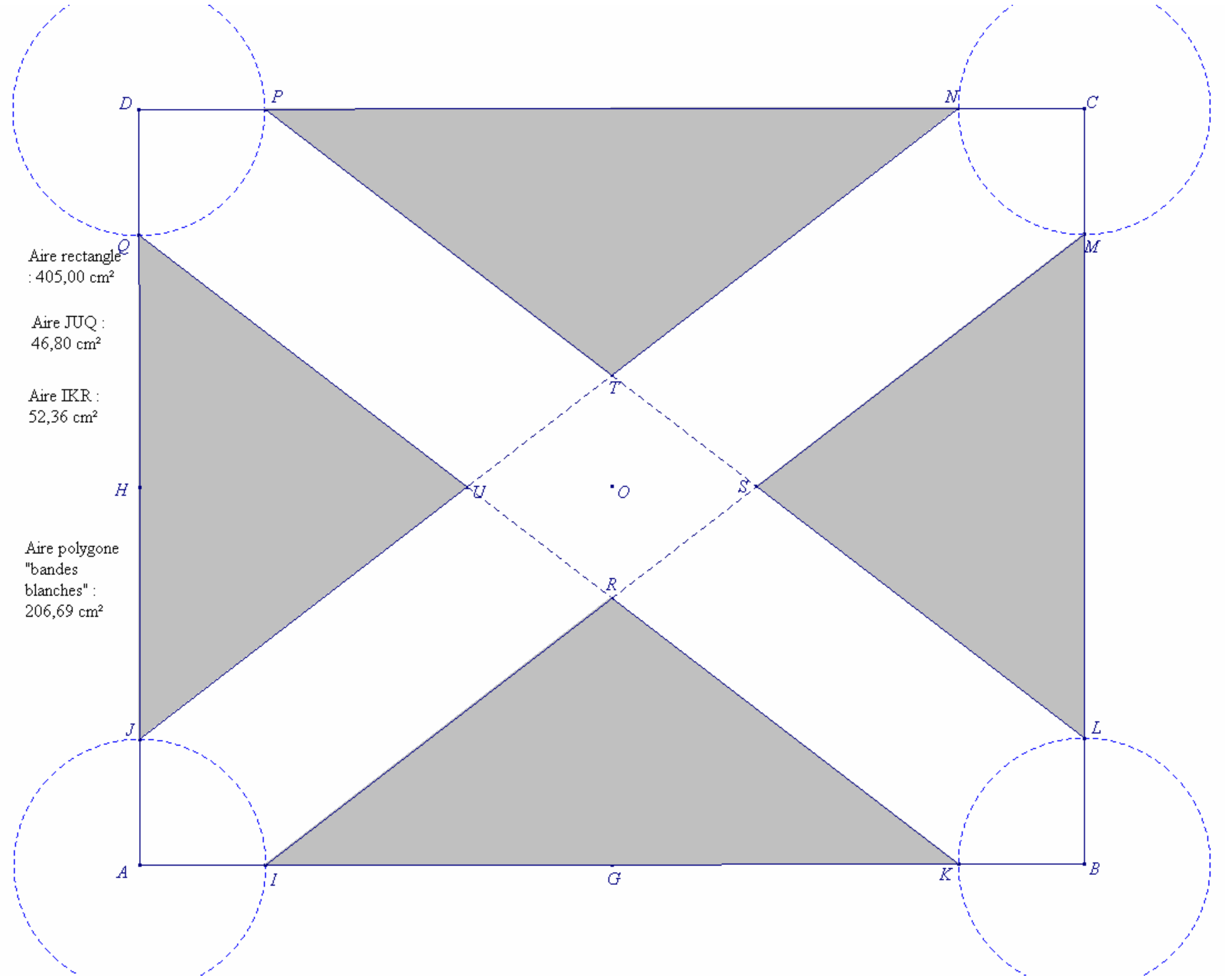
L'aire de HUJ est $\frac{1}{2}\times 12\times\frac{78}{5}=\frac{468}{5}$

Celle de GIR est $\frac{1}{2}\times\frac{33}{2}\times\frac{165}{13}=\frac{5445}{52}$

L'aire de $AIROUJ$ est $18\times\frac{45}{2}-\frac{5445}{52}-\frac{468}{5}=\frac{53739}{260}$ et l'aire de la partie blanche du drapeau est quatre fois plus grande.



La figure a été réalisée à l'échelle $\frac{1}{2}$. On a mesuré quelques aires utiles. Le lecteur pourra vérifier que l'aire affichée du polygone « bandes blanches » (à l'échelle $\frac{1}{2}$) est cohérente avec le résultat $\frac{53739}{65}$ que nous avons trouvé.



En résumé, on a procédé ainsi :

- Transformation du drapeau en figure de géométrie.
- Relevé et justification des éléments de symétrie de la figure (un centre, deux axes).
- Extraction d'une figure clef (le rectangle *AGOH* est un bon candidat).
- Calcul des grandeurs utiles (les longueurs des côtés *HU* et *GR*, hauteurs des « triangles bleus »), c'est le point le plus délicat de la résolution.
- Calcul de l'aire de la partie bleue puis de l'aire de la partie blanche.

3. Commentaire

Vive l'Ecosse indépendante.