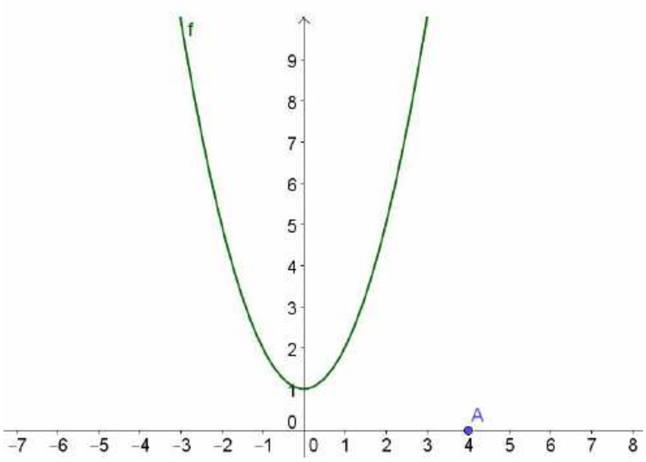
ESD2019_15 : Dérivation

1. Le sujet

A. Exercice



Dans un repère, on a représenté graphiquement la fonction $f\ :\ x \mapsto x^2+1$ et le point $A(4\ ;\ 0)$.

Existe-il des tangentes à la courbe passant par le point A ?

B. Les réponses de deux élèves de première S.

Elève 1.
Avec un logiciel, je construis la parabole et une droite variable passant par A. Je constate qu'il existe une seule tangente, en $x=-0{,}1$.

Je cherche alors l'équation de cette tangente sous la forme $y=m(x-4)$. *L'équation du second degré* $x^2+1=m(x-4)$ *doit avoir une seule solution, car il n'y a qu'un seul point d'intersection entre une courbe et sa tangente. Donc son discriminant doit être nul et j'en déduis la valeur de m.*

Elève 2.
Je sais que l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse a est $y-(a^2+1)=2a(x-a)$.
Elle doit passer par A et donc l'équation devient $-a^2-1=2a(4-a)$. *Cette identité remarquable est fausse, je ne sais pas continuer.*

C. Les questions à traiter devant le jury

1. Analyser les démarches de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs, ainsi que l'accompagnement que vous pourriez leur apporter.

2. Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première scientifique.

3. Proposez deux exercices sur le thème *dérivation* dont l'un au moins illustre une application à une autre discipline scientifique.

2. Eléments de correction

Ce sujet est proposé dans un thème « dérivation » qui apparaît, me semble-t-il, pour la première fois et qui recoupe certains thèmes des sessions de la décennie 2000 – 2010 (voir REDCM pages 137 à 158 « thèmes concernant les fonctions ».
Il est à rapprocher de esd2019_3c04 qui, lui, était proposé dans le thème « problèmes conduisant à la résolution d'une équation ». Peut-être que ce classement aurait été plus judicieux ici, car une résolution est possible sans jamais faire appel à la dérivation. C'est un peu déconcertant.

Les deux productions d'élèves sont intéressantes car on y relève, dans l'une comme dans l'autre, des erreurs caractéristiques qu'il ne faut pas manquer.

1. Analyse de travaux d'élèves.

Chouquerouste.

Aujourd'hui Chouquerouste nous montre qu'un avenir radieux s'ouvre à lui dans la carrière politique.

Dans un premier temps, il dégaine son logiciel de représentation graphique et « constate ». Nous en avons l'habitude, ce n'est pas la première fois, ni la dernière je présume.

Aujourd'hui cependant, il est conscient qu'un « constat » ne suffit pas, et il se propose de justifier son constat. Pour ce faire, il se fend dans un second temps d'un texte sous forme de programme électoral Yakafaucon, c'est-à-dire d'une mise en perspective qui ne sera jamais appliquée. Un gage de réussite sans aucun doute …

On y relève un théorème en acte classique : « *il n'y a qu'un seul point d'intersection entre une courbe et sa tangente* » qu'il faudra un jour ou l'autre mettre en défaut (la situation étudiée ici ne se prête pas à cette mise en défaut, mais Chouquerouste ne paie rien pour attendre).

En accompagnement, on reviendra sur son idée : « *Je cherche alors l'équation de cette tangente sous la forme* $y = m(x-4)$. ». Est-ce bien l'équation d'une tangente qu'il cherche ainsi ? Et on lui fera mettre en application son programme électoral. Il pourra ainsi *vérifier* si, oui ou non, il y a une tangente passant par A issue du point d'abscisse $x = -0{,}1$

Elève 2.

Réussites.
Cet élève a une bonne compréhension de la situation. Il écrit correctement l'équation de la tangente à la parabole en son point d'abscisse a et parvient à une relation qui, correctement interprétée, permettrait d'aboutir.

Echec
C'est dans le traitement mathématique de la relation qu'il a obtenue que c'est élève est en échec. Il confond « équation » et « identité remarquable », ce qui constitue pour lui un obstacle insurmontable.

Il est possible que cet élève ait été influencé par le souvenir de l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ que cet élève a certainement rencontrée dans d'autres circonstances. Ici, il a vu « $a^2 + b^2$ », et il savait qu'une telle expression n'était pas factorisable.

Il est important de lui faire faire la distinction entre « équation » et « identité », ce qui est une affaire de quantificateurs. Est-ce que $-a^2-1=2a(4-a)$ pour toute valeur de a (quantificateur universel) ou bien est-ce qu'il existe une valeur de a telle que $-a^2-1=2a(4-a)$ (quantificateur existentiel) ?
Selon le cas, on pourra procéder à des identifications, ou bien on aboutira à une équation à résoudre. Le paramètre a n'a radicalement pas le même statut.
Un retour sur le texte de l'énoncé, qui précise bien « Existe-t-il … » pourra aider à une interprétation plus correcte.

2. Correction de l'exercice

Les productions de l'un et de l'autre élève peuvent servir de base à une correction, avec cependant un niveau de pertinence différent.

Reprenons l'idée de l'élève 2 :

- L'équation de la tangente T_a à la parabole au point M d'abscisse a est $y-(a^2+1)=2a(x-a)$. C'est d'accord (Il est là le lien avec la dérivation …).
- La tangente T_a passe par le point A si et seulement si le réel a vérifie la relation : $-(a^2+1)=2a(4-a)$.
- Autrement dit, T_a passe par le point A si et seulement si le réel a est solution de l'équation au deuxième degré vérifie la relation : $a^2-8a-1=0$. (On cherche quels sont les réels a, s'il en existe, tels que $a^2-8a-1=0$)

Cette équation a deux solutions, $a_1=4-\sqrt{17}$ et $a_2=4+\sqrt{17}$. Il existe deux points de la paraboles tels que la tangente passe par le point A, ce sont les points $M_1\left(4-\sqrt{17}\ ;\ 34-8\sqrt{17}\right)$ et $M_2\left(4+\sqrt{17}\ ;\ 34+8\sqrt{17}\right)$.

L'idée de Chouquerouste pourrait aboutir. Il s'agit de considérer une droite variable passant par le point A, non parallèle à l'axe Oy et à chercher ses points d'intersection avec la parabole. Parce que la courbe en question est une *parabole*, c'est-à-dire un cas particulier de *conique*, autrement dit une « *courbe du second degré* », cette courbe a zéro, un ou deux points d'intersection avec une droite quelconque du plan. Lorsqu'il y a un seul point d'intersection, il y a contact entre la parabole et la droite, la droite est tangente à la parabole.

Comme on le voit, cette démarche est *circonstancielle*, elle s'applique parce qu'on considère une parabole, mais elle ne s'appliquerait pas pour une courbe quelconque. Elle est susceptible d'engendrer de fausses représentations (celle que l'on a relevé : « une tangente a toujours un unique point commun avec la courbe » ou pire : « quand une droite a un seul point d'intersection avec une courbe, c'est une tangente »)

C'est pourquoi, me semble-t-il, cette démarche est moins pertinente que la précédente.

3. Commentaires

1. Voici un excellent exercice construit pour mettre en défaut des utilisations trop naïves de logiciels de représentations graphiques. Il y a ce que l'on voit sur l'écran et … ce qu'on ne voit pas. On note l'excellente copie d'écran qui montre la parabole s'échappant vers le firmament alors que l'axe *Ox* continue à être gradué de -8 à $+8$, comme pour mettre en garde : « attention, il y a peut-être des choses en dehors de l'écran ».

L'enseignant pourra éventuellement insister dans sa synthèse sur ce point.

On note aussi l'excellente production de Chouquerouste, très bien choisie cette fois, que j'ai certes traitée délibérément avec un peu d'amateurisme, mais qui n'en est pas moins très intéressante car elle permet au candidat de donner son point de vue sur la question de « ce qu'on constate » et de rebondir sur la distinction entre « ce qu'on voit » et « ce qu'on démontre ».

Bref, un bon sujet d'oral, comme on les aime, pas très compliqué mais avec du grain à moudre.

2. Sur les applications de la dérivation, voir par exemple le sujet **esd2018_3c04**. L'exercice jury y est d'une nullité ébouriffante (proposer tout exercice sauf celui-là), mais en fin de commentaires de ce sujet, lire le « Pour aller plus loin » qui pourra donner une idée.