ESD2019_14 : Problèmes avec prise d'initiative

1. Le sujet

A. Exercice

Au début du XIX^{e} siècle, un marchand veut remonter de Cette jusqu'à Toulouse pour vendre sa farine. Pour cela, il emprunte le canal du Midi qui relie la mer Méditerranée à la Garonne. Ce canal comporte 63 écluses. À chacune d'elles, le marchand doit laisser 1 % de son chargement en péage et échanger 5 kg de farine contre de la nourriture.

1. Si le marchand part de Sète avec 10 tonnes de farine, combien lui en restera-t-il à Toulouse ?

2. Pour rentabiliser son voyage, le marchand doit arriver à Toulouse avec au moins la moitié de son chargement de départ. Quelle quantité minimale de farine doit-il embarquer à Sète pour que son voyage soit rentable à l'arrivée à Toulouse ?

B. Les réponses de trois élèves de terminale scientifique à la question 2.

Elève 1.

J'ai rédigé un programme en langage Python. Pour trouver la quantité minimale de farine, j'ai programmé une fonction qui calcule le chargement restant lors de l'arrivée à Toulouse. Puis je suis parti de 10000 *et j'ai cherché le nombre minimum de kg de farine pour rentabiliser le voyage. Le programme affiche* 7589.

```
from math import *
def toulouse(a) :
    for i in range(63):
        a = a - 0.01*a - 5
    return(a)

a = 10000
while toulouse(a) >= a/2:
    a = a - 1
print(a)
```

Elève 2.

N est le nombre de kg à l'arrivée, il faut l'augmenter de 1% à chaque écluse. J'obtiens : $N \times 1{,}01^{63}$ *kg puis il faut ajouter* 63×5 *kg pour la nourriture.*

On veut que $N \times (1{,}01)^{63} + 315 = 2N$, *je trouve* $N = 2456$ *donc il doit partir de Sète avec le double soit 4912 kg de farine.*

Elève 3.

J'appelle u_n *le nombre de kg à la* n^{e} *écluse. On a donc :* $u_{n+1} = 0{,}99\, u_n - 5$ *et je dois résoudre* $u_{63} \geq \frac{u_0}{2}$.

Ensuite, je ne sais pas comment faire.

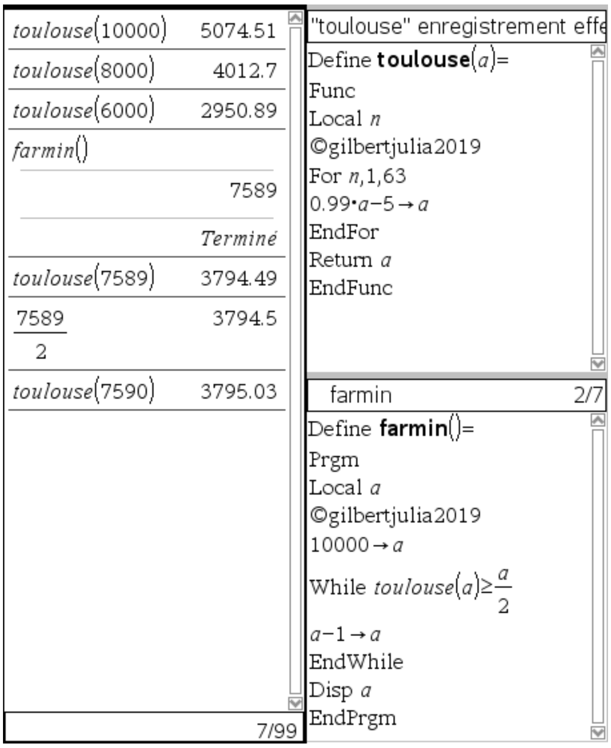
2. Eléments de correction

Passons sur le tarif exorbitant de passage d'une écluse. Le terme « d'enfariné » pour désigner une personne facile à berner viendrait-il des éclusiers rapaces du canal du Midi ? L'hypothèse est permise.

Quoi qu'il en soit, voici un exercice contextualisant tant bien que mal la notion de suite arithmético-géométrique. Il est donné dans le thème « problèmes avec prise d'initiative » car cette notion sous-jacente à l'exercice n'est pas identifiée par l'énoncé. Cet exercice se prête à plusieurs démarches de résolution, dont une démarche prenant appui sur l'utilisation d'algorithmes, ce qui conforte son classement dans ce thème.

1. Analyse de travaux d'élèves.

Escartefigue.
Résultat correct (à un kilo près ...)
Je ne connais pas le langage Python, je ne suis pas habilité à émettre une appréciation.
Escartefigue semblerait avoir défini correctement une fonction, la fonction **toulouse** qui renvoie la quantité restante à l'arrivée. Il a ensuite écrit un algorithme exploitant la précédente fonction qui détermine à quel moment la barre de la moitié de la quantité initiale est franchie, à l'aide d'une boucle « Tant que … ». Il explique cela lui-même.



Il s'agit d'une démarche aboutie qui propose un exemple d'utilisation pertinente des outils numériques et, à propos d'Escartefigue, une authentique compétence à mettre en œuvre ces outils à bon escient.

L'unique remarque que l'on peut faire est que la valeur affichée est la première valeur entière qui *ne vérifie pas* le critère de sélection. Il aurait dû faire afficher la valeur précédente, en l'occurrence 7590.
De même, ci-contre, il y a une erreur (délibérée …) dans le programme **farmin** : il faut en corriger la dernière ligne : « Disp $a+1$ » et non : « Disp a »

Elève 2
Résultat incorrect.
Réussite.
Cet élève a tenté de modéliser à l'aide d'une suite le parcours inverse. Il s'est posé la question suivante : « Quelle quantité avant le passage d'une écluse permet d'obtenir une quantité donnée après ce passage ? ».
Bonne question ….

Echecs.
Cet élève commet une erreur rédhibitoire : il pense que pour compenser une diminution de 1 % d'une quantité, il faut appliquer une augmentation de 1 %.

On note qu'il ne tient pas compte non plus du fait que les 5 kg de farine « pour la nourriture » proviennent d'une quantité qui est sujette à variations.

La question à lui poser est : « Est-il vrai qu'une augmentation de t % compense une diminution de t % ? ».
En principe, ce sujet a été abordé dans les classes précédentes.

Pour le reste (les 5 kg à prélever), on verra.

Bien qu'il n'ait pas abouti, cet élève a rempli le contrat : il a fait preuve d'initiative et a su s'engager dans une démarche. Le résultat qu'il obtient est plausible et cohérent avec la représentation, certes incorrecte, qu'il s'est faite de la question à résoudre.

Elève 3.

Réussites
Cet élève a une bonne compréhension du problème à résoudre. Il a correctement identifié la relation de récurrence déterminant une quantité de farine en fonction de la quantité précédente.

Echec.
Cet élève a échoué dans tout traitement mathématique du problème.

Un « accompagnement » pour cet élève : lui donner un moyen de s'engager dans un traitement mathématique, donc l'accompagner sur un ou plusieurs pas de la résolution (?).

2. Correction de l'exercice

On ne peut poser mieux le problème que ne le fait l'élève 3.

Il s'agit d'étudier une suite arithmético-géométrique. Voir le sujet esd2018_15 pour un texte exposant une méthode d'étude de ce type de suite. Je ne le refais pas.

La façon attendue d'interpréter l'énoncé semble être la suivante : Le capitaine fait peser sa cargaison puis va « acheter de la nourriture ».

La formule de récurrence est dans ce cas : $v_{n+1} = 0{,}99 \times v_n - 5$, c'est la formule de l'élève 3.

Ici, le point fixe est $\alpha = -500$ et on arrive à la formule explicite : $u_n = -500 + 10500 \times (0{,}99)^n$ dans la première question puis, en désignant par Q la quantité initiale de farine à la formule : $u_n = -500 + (Q+500) \times (0{,}99)^n$ dans la deuxième question.
Comme l'explique l'élève 3, nous devons donc résoudre : $-500 + (Q+500) \times (0{,}99)^{63} \geq \dfrac{Q}{2}$.

Ce n'est rien d'autre qu'une inéquation au premier degré peu banale.
Un coup d'œil à la calculatrice nous convainc que $0{,}99^{63} > \dfrac{1}{2}$. Nous écrirons l'inéquation ainsi : $Q \times \left(0{,}99^{63} - \dfrac{1}{2}\right) \geq 500 \times \left(1 - 0.99^{63}\right)$

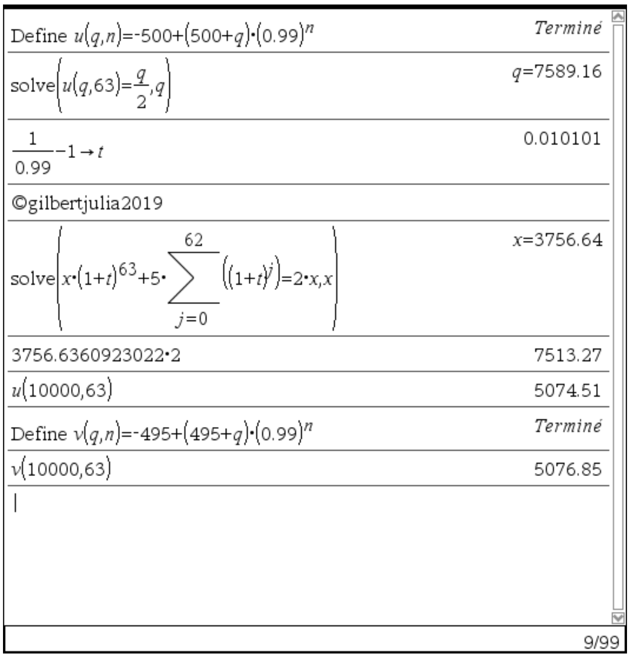
.

Elle a pour solution : $Q \geq \dfrac{500\times\left(1-0.99^{63}\right)}{0{,}99^{63}-\dfrac{1}{2}}$. On invitera les élèves à utiliser leur calculatrice pour proposer une valeur approchée de ce nombre.

Nous obtenons : $Q \geq 7590$

J'ai ensuite tenté de proposer « pour le fun » une formule qui corrigerait la démarche de l'élève 2. Le résultat obtenu n'est pas concordant avec le précédent.

D'où vient cette distorsion ?



Une autre interprétation de l'énoncé, au moins aussi pertinente que la première, est la suivante : Le capitaine va « acheter de la nourriture » puis fait peser sa cargaison (ce qui, on en conviendra, est plus malin).

La formule de récurrence est dans ce cas : $v_{n+1} = 0{,}99\times\left(v_n - 5\right) = 0{,}99\, v_n - 4{,}95$

Le point fixe est maintenant $\alpha = -495$ et on arrive à a formule explicite : $u_n = -495 + 10495\times\left(0{,}99\right)^n$ dans la première question puis, en désignant par Q la quantité initiale de farine à la formule : $u_n = -495 + \left(Q + 495\right)\times\left(0{,}99\right)^n$ dans la deuxième question.

Nous devons maintenant résoudre : $-495 + \left(Q+495\right)\times\left(0{,}99\right)^{63} \geq \dfrac{Q}{2}$, inéquation dont la solution arrondie à l'entier supérieur est précisément $Q \geq 7514$.

Résultat qui concorde avec celui issu de la démarche de l'élève 2. Une fois corrigée, cette démarche tient bien la route.

Il est intéressant de comparer les deux interprétations que nous avons rencontrées d'un énoncé quelque peu ambigu.