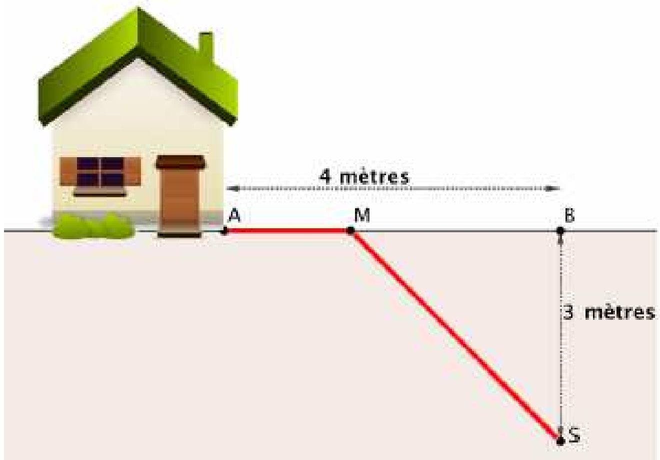
ESD2019_12. Optimisation

1. Le sujet

A. Exercice

Une maison doit être raccordée, à partir du point A, à un réseau de gaz situé au point S, à 4 mètres de A horizontalement et à 3 mètres verticalement de B, à l'aide d'une conduite comme indiqué sur la figure ci-contre.
La conduite de gaz est schématisée en rouge.
L'installation de la partie de la conduite située à la surface du sol coûte 300 euros par mètre alors que celle enfouie sous le sol coûte 750 euros par mètre.

Où placer le point M sur le segment $[AB]$ pour rendre le coût de raccordement minimal ?



B. Les réponses de trois élèves de terminale scientifique

Elève 1
Si on enterre complètement la conduite, alors elle est représentée par [AS]. Avec le théorème de Pythagore, on a $AS = 5$ *m et le coût vaut donc* $5 \times 750 = 3750$ *donc* 3750 *euros.*

Si on va jusqu'au point B et que l'on descend verticalement jusqu'à S, alors le coût vaut : $4 \times 300 + 3 \times 750 = 3450$ *soit* 3450 *euros. Plus on ira vers B, moins il y aura de partie enterrée donc le coût minimal est obtenu quand M = B, soit à 4 mètres de A.*

.

Elève 2
Avec le tableur, je calcule pour toutes les valeurs possibles de la distance AM (entre 0 et 4 mètres tous les centimètres car cela suffit dans la réalité), la distance MS avec Pythagore puis le coût de la partie au sol et le coût de la partie enfouie. Le coût minimal total est 3262,16 *euros quand on commence à creuser à* 2,69 *mètres du point A*

	A	B	C	D	E
1	AM	MS	Coût au sol	Coût en terre	Coût total
2	0	5	0	3750,00	3750,00
3	0,01	4,99200361	3	3744,00	3747,00
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
270	2,68	3,27756007	804	2458,17	3262,17
271	2,69	3,277354548	807	2455,16	3262,16
272	2,7	3,26955654	810	2452,17	3262,17
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
402	4	3	1200	2250	3450

Elève 3
Je pose $AM = x$ *et j'ai calculé la longueur* $AM + MS$*. J'obtiens une fonction* $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 8x + 25}$.
Avec ma calculatrice, je vois que la fonction est strictement croissante de 5 jusqu'à 7. Donc il faut mettre M en A pour avoir le minimum.

C. Les questions à traiter devant le jury

1. Analyser les productions de ces trois élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez l'aide que vous pourriez leur apporter.

2. Présenter une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3. Proposer deux exercices sur le thème optimisation permettant notamment de développer la compétence « raisonner ».

2. Eléments de correction

L'exercice présente un cas particulier d'application de la relation de Descartes. Classé dans le thème « optimisation », il pourrait l'être en « prise d'initiative ». Les productions d'élèves nous montrent deux méthodes différentes permettant de résoudre le problème, l'une dans un cadre numérique et l'autre dans le cadre fonctionnel.

Deux conceptions différentes de la canalisation à coût minimal apparaissent en première intention :

C1 : « Comme le chemin le plus court pour relier deux points est la ligne droite, la canalisation la moins chère est celle qui suit une ligne droite ». C'est la conception de l'élève 3 qui n'a pas pris en compte le facteur « coût unitaire au mètre ».

C2 : « Puisqu'il est plus cher d'enterrer la canalisation, il faut minimiser le trajet enterré ». C'est la conception de l'élève 1.

Il faudra faire apparaître que la canalisation optimale est un compromis entre ces deux conceptions. En effet, « moins il y a de canalisation enterrée, plus la canalisation est longue ». Il y a dans cette formulation deux adverbes de quantité antagonistes (un peu de grammaire …), on ne peut conclure *a priori* ni dans un sens, ni dans l'autre.

1. Analyse de travaux d'élèves.

Elève 1
Réponse incorrecte.
Cet élève compare les deux conceptions différentes précitées de la canalisation, et obtient (correctement) que la conception **C2** est meilleure que **C1**. L'énoncé qu'il propose comme solution est équivalent à celui de **C2.**

Erreur.
Cet élève commet une erreur de type paralogique, car il ne tient pas compte du facteur « longueur totale de la canalisation ».

Seule une confrontation à un exemple de canalisation plus performante (extraite du tableur de l'élève 2 par exemple) pourrait remettre en cause sa conception du problème.

Bougnègue
Réponse correcte.
Bougnègue a discrétisé la situation à l'aide d'une suite qu'il a tabulée.
Il a « modélisé » et non « représenté », car il justifie très clairement la raison de sa discrétisation : *« tous les centimètres car cela suffit dans la réalité ».*
Sa solution, exhaustive, est donc pertinente et recevable. Elle pourrait tenir lieu de « correction », l'idée d'une discrétisation est excellente, mais bien entendu on en donnera une autre.

Lui faire remarquer que, en admettant une propriété de convexité de la fonction coût, le tableur établit seulement que le minimum se situe entre 2,68 et 2,70 ne serait, me semble-t-il, qu'une remarque oiseuse et de mauvaise foi. Bougnègue n'a besoin aujourd'hui d'aucun accompagnement, à part lui proposer de résoudre ce qu'il a déjà résolu par une autre méthode.

Elève 3
Réponse incorrecte.
Cet élève n'a pas pris en compte le facteur coût unitaire et a étudié la fonction « longueur totale », sans pondérer les longueurs hors-sol et enterrée de leur coût unitaire. Son erreur est liée à une non compréhension du problème posé.

On peut confronter cet élève au texte même de l'énoncé, et lui faire expliciter les hypothèses qu'il n'a pas prises en compte.

On peut d'autre part mettre en cause son affirmation « *avec ma calculatrice je vois que …* ». On ne voit rien à travers une calculatrice, il faut justifier « ce qu'on voit ». Par exemple, lui proposer d'expliciter la fonction dérivée et d'en étudier le signe (tout cela avec sa calculatrice, pourquoi pas, l'utilisation de la calculatrice a dans ce cas un autre statut que la simple observation)

2. Correction de l'exercice

On reprend l'idée de l'élève 3, mais en pondérant cette fois les longueurs des deux tronçons par leur coût unitaire.

La fonction coût est ainsi la fonction : $C(x)=300\,x+750\sqrt{x^2-8x+25}$, où x est un réel qui appartient à l'intervalle $[0,\,4]$ (il est important de toujours préciser l'intervalle d'étude).

Je laisse au lecteur le soin de continuer avec ces valeurs numériques.

En synthèse, on comparera les deux résolutions, en mettant en valeur les deux modélisations : modélisation séquentielle à l'aide du tableur (celle de Bougnègue) et modélisation fonctionnelle (celle de l'élève 3 mais correctement pondérée), sans prendre parti pour l'une ou pour l'autre particulièrement.

3. Pour aller plus loin

Je propose de généraliser l'étude précédente.

Je prends comme unité le coût d'un mètre de canalisation hors-sol et je désigne par k le coût d'un mètre de canalisation enterrée, où je suppose que k est un coefficient strictement plus grand que 1 (le mètre de canalisation enterrée est censé coûter plus cher qu'une canalisation de surface ; dans notre exemple : $k=\frac{750}{300}=2{,}5$).

La fonction coût est ainsi la fonction : $C(x)=x+k\sqrt{x^2-8x+25}$, où x est un réel qui appartient à l'intervalle $[0,\,4]$.

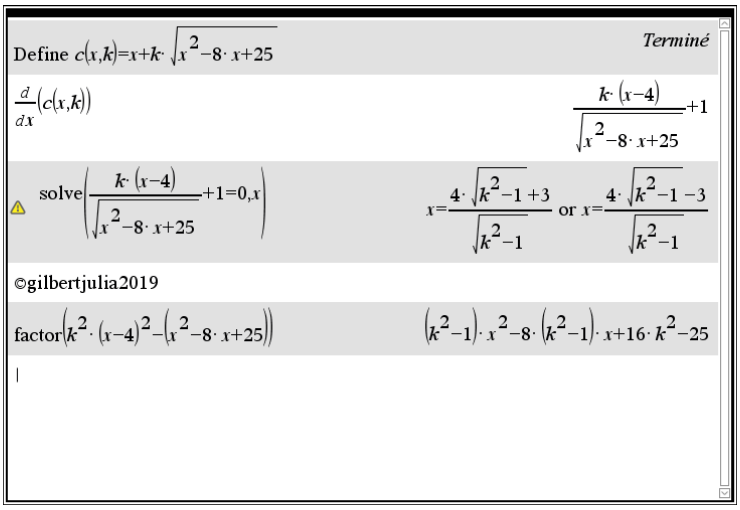
La fonction coût est ainsi la fonction : $C(x)=x+k\sqrt{x^2-8x+25}$, où x est un réel qui appartient à l'intervalle $[0,\,4]$.

La fonction dérivée est du même signe que

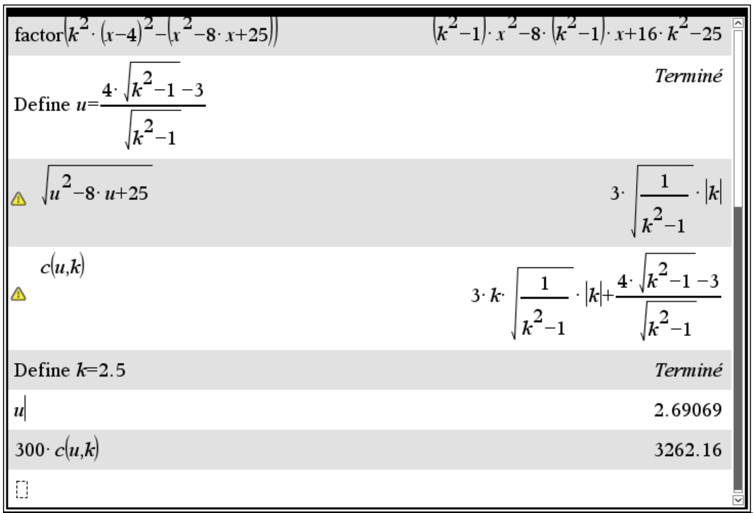
$$\left(1-\frac{k\,(4-x)}{\sqrt{x^2-8x+25}}\right)\times\left(1+\frac{k\,(4-x)}{\sqrt{x^2-8x+25}}\right)$$

Sur l'intervalle $[0,\,4]$, elle change de signe pour la valeur : $x=4-\frac{3}{\sqrt{k^2-1}}$

Dans notre exemple : $x=4-\frac{2\sqrt{21}}{7}$ est la valeur exacte de la distance optimale *AM*.

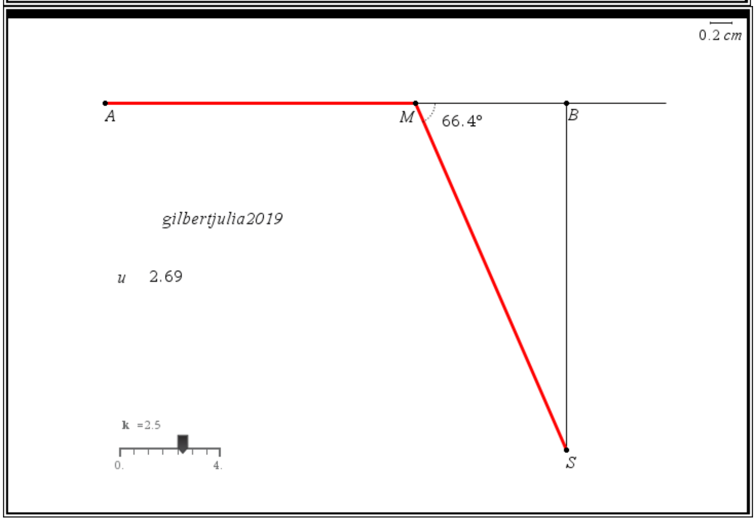


pour $k = 2{,}5$, nous obtenons une longueur hors sol optimale voisine de 2,69. comme quoi Bougnègue est habilité à dire que l'on n'en est pas à un centimètre près, il est parvenu à la même conclusion.



La distance MS est égale à $\dfrac{3k}{\sqrt{k^2-1}}$.

On note que $MB = \dfrac{3}{\sqrt{k^2-1}}$



De sorte que : $\dfrac{MB}{MS} = \dfrac{1}{k}$.

Le coût est minimal lorsque : $k.\sin \widehat{BMS} = 1$.

C'est une condition géométrique liée à ce que les physiciens « réfractaires » appellent la « loi de Descartes[1] ».

Dans l'exemple qui nous occupe : $\sin \widehat{BMS} = \dfrac{2}{5}$

[1] Voici une occasion de lui rendre hommage, à une époque où l'esprit cartésien est, pour le malheur de l'humanité, en net recul.