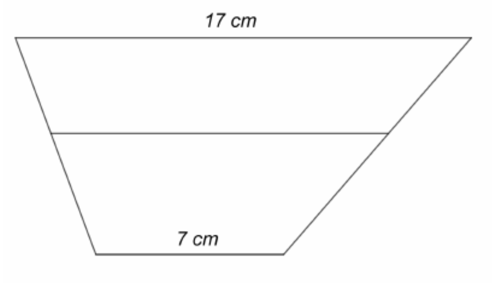
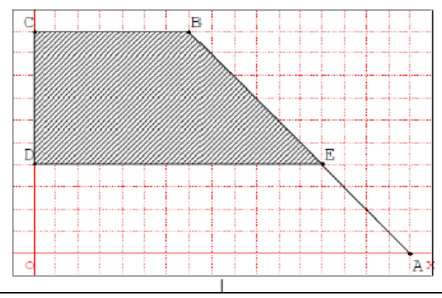
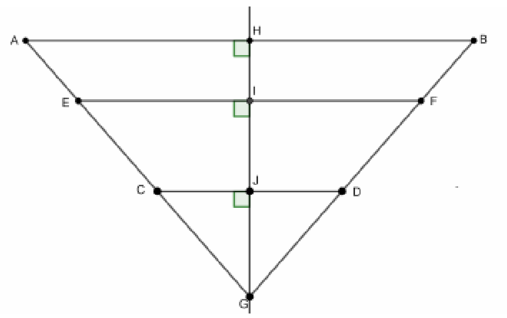
ESD 2019_11 : Géométrie plane

1. Le sujet

A. L’exercice proposé au candidat

On considère un trapèze, représenté ci-contre : ses bases sont de longueurs 7 cm et 17 cm. On partage ce trapèze en deux trapèzes de même aire en traçant un segment parallèle aux bases. Quelle est la longueur de ce segment ?	

B. Les productions de deux groupe s d’élèves de Cycle 4

Groupe 1 *On a construit une figure dans un quadrillage avec une hauteur du grand trapèze égale à* 10 *carreaux.* *On remarque que le côté oblique partage chaque carreau en* 2, *c’est facile de compter tous les carreaux.* *On a tracé le trait pour obtenir la largeur du milieu* : 13.	
Groupe 2 *On a reconnu une figure de Thalès. GAB est un agrandissement de GCD de rapport 17/7* *GEF est un agrandissement de GCD de rapport l/7* . *On a posé a = aire de GCD.* *Comme on a l’égalité des aires des deux trapèzes ABFE et EFDC, on a écrit :* $\frac{17}{7}a-\frac{l}{7}a=\frac{l}{7}a-a$ *On a simplifié et on obtient* $l=12$	

C. Les questions à traiter devant le jury

1. Analysez les productions de ces deux groupes d’élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez, en particulier, les aides qui pourraient leur être apportées.

2. Présenter une correction de l’exercice telle que vous l’exposeriez devant une classe en cycle 4.

3. Proposer deux exercices, un au niveau du lycée et un au niveau du collège sur le thème *géométrie plane*.

2. Eléments de correction

Classé dans le thème « *géométrie plane* », cet exercice aurait pu aussi bien figurer dans le thème « *prise d'initiative* ». Il s'agit d'un problème de recherche qui, selon les documents dont nous disposons, est l'objet d'un travail en groupes. Il est préférable en effet qu'il soit abordé ainsi, de manière à favoriser une diversité d'approches.

Pour en faciliter la compréhension, l'énoncé est accompagné d'un croquis qui n'est pas à l'échelle. Ce « croquis » a un statut de dessin explicatif et non un statut de figure. Il appartient aux élèves de transformer ce dessin en figure de géométrie en le codant comme ils l'entendent et en en choisissant les caractéristiques. Les deux groupes ne s'y trompent pas car, l'un et l'autre, ils vont particulariser la situation[1].

1. Analyse des travaux d'élèves.

Groupe 1

Ce groupe particularise la situation en choisissant, dans un plan quadrillé, un trapèze rectangle dont la hauteur est en outre égale à l'écart entre les longueurs des deux bases, ce qui permet de déterminer l'aire du trapèze par un dénombrement de carreaux (un carreau fait office d'unité d'aire).
Le trapèze *ABCD* ayant pour aire 120 carreaux, ils cherchent un trapèze dont l'aire est égale à 60 carreaux. Ils observent que si $OD = 4$, le trapèze *OAED* a justement pour aire $4\times 13 + 8 = 60$ carreaux, donc que si $DE = 13$, le trapèze *ABCD* est bien partagé en deux trapèzes de même aire.

Leur résolution est correcte et recevable, sous réserve que l'on admette que le partage en deux trapèzes d'aires égales est indépendante de la hauteur du trapèze (ce qui est le cas).

Cependant, cette résolution exploite une opportunité offerte par le choix des données. Elle n'est pas reproductible.

On pourrait proposer à ce groupe un changement de données, par exemple un trapèze dont les bases mesureraient 8 et 18 cm. On peut imaginer la réponse : « Aucun problème, on va allonger d'un carreau les deux bases, et on va trouver $DE = 14$ au lieu de 13 ».
« Bien sûr ! Très bien, vérifiez quand même … », telle serait notre réponse.

Ce changement de données contrarierait leur démarche car cette fois le positionnement de *E* deviendrait problématique.

Groupe 2

Ce groupe aussi particularise le problème en choisissant un trapèze isocèle. Cependant, contrairement au groupe 1, ce groupe n'utilise pas cette particularité pour développer sa démarche.

Réussites

La principale réussite de ce groupe est le fait qu'il a transformé le dessin en une figure de géométrie, non seulement en la codant mais en la complétant par des constructions auxiliaires utiles. Il en est ainsi du point d'intersection *G* des supports des côtés non parallèles du trapèze.
D'autre part, ce groupe a identifié le lien entre la question posée et une configuration de Thalès.
Enfin, ce groupe a su reformuler le problème : il y a égalité des aires des deux trapèzes s'il y a une relation remarquable entre les aires de différents triangles homothétiques de la figure.

[1] Cette situation est connue sous le nom de « problème de Saint Martin ». Selon la légende, le légionnaire et futur saint Martin trancha son manteau d'un coup d'épée pour en donner la moitié (celle qui lui appartenait, l'autre appartenant à l'Empereur) à un pauvre transi de froid. Depuis, on a donné son nom au problème de partage d'un domaine en deux domaines de même aire.

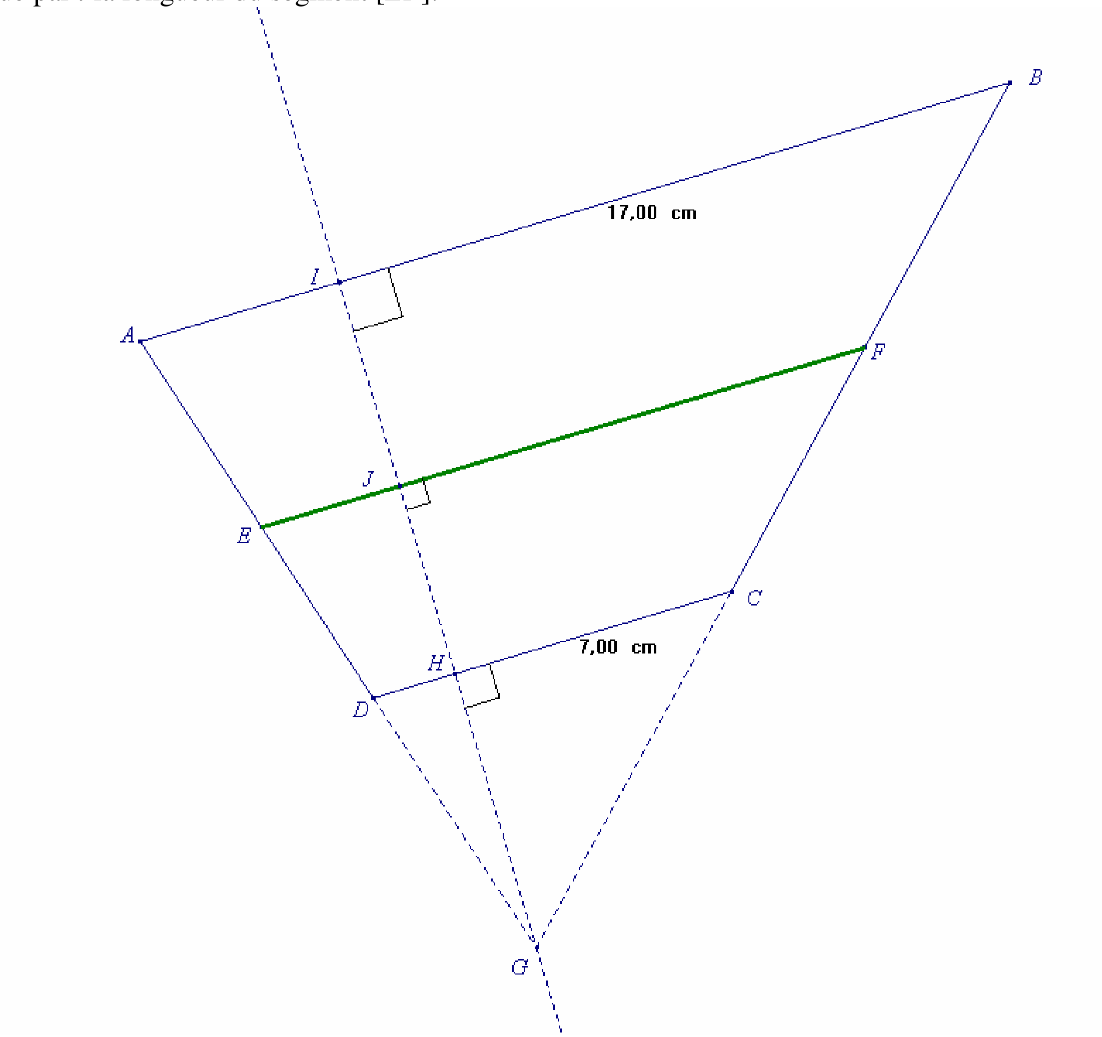
Echec.
Ce groupe a une conception incorrecte de l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction de rapport donné k. Selon lui, les aires sont aussi multipliées par ce même coefficient k.

Suivant cette conception, la longueur du segment $[EF]$ doit être la moyenne arithmétique des longueurs des deux bases. (Ce qui revient à partager le trapèze par le segment joignant les milieux des côtés non parallèles).

C'est cette conception qu'il faut mettre en défaut d'une façon ou d'une autre, soit en faisant vérifier que les deux trapèzes obtenus ont bien la même aire (ils verront que non) soit en mettant en cause directement la « propriété » utilisée : « Est-ce que si un multiplie par 2 (par exemple …) les dimensions d'un triangle son aire est elle aussi multipliée par 2 ? »

2. Correction de l'exercice.

On s'appuie sur la production du groupe 2, en reprenant les mêmes notations. On désigne cependant par x plutôt que par l la longueur du segment $[EF]$.



Désignons par a l'aire du triangle GCD.

GAB étant un agrandissement de GCD de rapport 17/7 : $aire\ \ GAB = \left(\frac{17}{7}\right)^2 \times (aire\ \ GCD) = \left(\frac{17}{7}\right)^2 \times a$

GEF étant un agrandissement de GCD de rapport x/7 : $aire\ \ GEF = \left(\frac{x}{7}\right)^2 \times (aire\ \ GCD) = \left(\frac{x}{7}\right)^2 \times a$

Les deux trapèzes ont la même aire lorsque : $(aire\ \ GEF) - (aire\ \ GEF) = (aire\ \ GEF) - (aire\ \ GCD)$.

c'est-à-dire lorsque : $\left(\frac{17}{7}\right)^2 \times a - \left(\frac{x}{7}\right)^2 \times a = \left(\frac{x}{7}\right)^2 \times a - a$

On note que cette relation ne dépend pas de l'aire du triangle GCD, c'est pourquoi on peut « simplifier » comme dit le groupe 2 : $\left(\frac{17}{7}\right)^2 + 1 = 2 \times \left(\frac{x}{7}\right)^2$.

Et c'est pour cette raison aussi que le groupe 1 a le droit de particulariser la configuration choisie. Cette remarque justifie leur façon de procéder.

Ladite relation est équivalente à : $x^2 = \frac{17^2 + 7^2}{2}$, ou encore à $x^2 = 169$.

On obtient $x = 13$, solution que le groupe 1 avait brillamment trouvée.

NB. Avec 8 et 18, on obtiendrait : $x^2 = \frac{18^2 + 8^2}{2} = 194$. Certes, la solution est voisine de 14, mais ce n'est pas 14 …

De façon générale, si u et v sont les longueurs (distinctes) des deux bases, $x^2 = \frac{u^2 + v^2}{2}$.

Le partage en deux trapèzes de même aire est obtenu lorsque le carré de la longueur de [EF] est la moyenne arithmétique des carrés des longueurs des deux bases.