ESD 2019_10 : Conjecture et démonstration

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

Pour tout réel p, on considère la fonction f_p définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f_p(x)=x(p-\ln x)$

1. Montrer que f_p possède un maximum sur $]0\,;+\infty[$, atteint en une valeur x_p que l'on précisera.

2. On note S_p le point de la courbe représentative de f_p d'abscisse x_p. L'affirmation suivante est-elle vraie ?

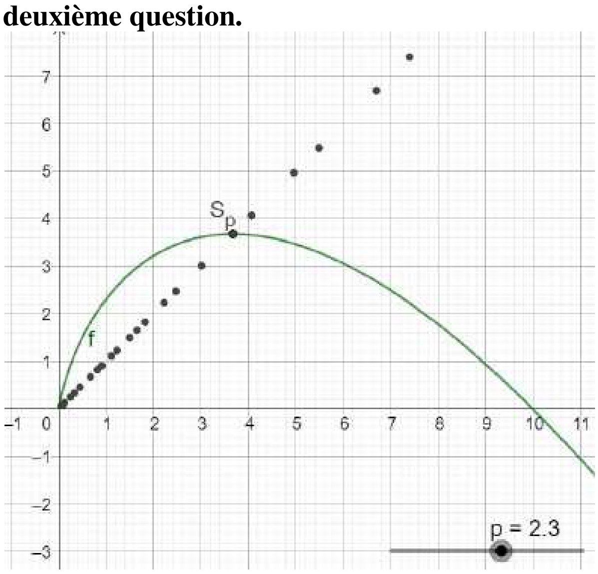
Affirmation : lorsque p parcourt **R**, l'ensemble des points S_p est une demi-droite.

B. Les productions de deux élèves de terminale S à la deuxième question.

Elève 1

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, j'ai affiché la trace des sommets des courbes des fonctions f_p :

J'observe que les points S_p sont alignés. L'affirmation est vraie.



Elève 2

À la première question, j'ai trouvé que $x_p=\exp(p-1)$ *et donc on trouve la courbe d'une exponentielle. L'affirmation est fausse.*

C. Les questions à traiter devant le jury

1. Analyser les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs éventuelles. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

2. Présenter une correction de la deuxième question de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale S.

3. Proposer deux exercices sur le thème *conjecture et démonstration*, l'un au niveau collège et l'autre au niveau lycée. L'un des exercices devra notamment développer la compétence « raisonner ».

2. Eléments de correction

L'exercice porte sur l'étude d'une famille de fonctions dépendant d'un paramètre et sur la famille des courbes qui représentent ces fonctions. Cet exercice conduit à l'étude d'un lieu géométrique, le lieu géométrique d'un point mobile.

Le choix de l'auteur de l'exercice est de préciser la nature du lieu sous forme d'affirmation. L'objectif est, par cette affirmation, de mettre en valeur le fait que dans la recherche d'un lieu géométrique, une phase d'analyse (tel point appartient à telle courbe) ne suffit pas, encore faut-il procéder à une synthèse (quels sont les points de la courbe qui conviennent et ceux éventuellement qui ne conviennent pas).

On note l'excellente qualité de l'énoncé, qui sépare bien le registre fonctionnel (première question : on étudie les variations d'une fonction qui admet un maximum) et le registre graphique (deuxième question : on étudie des propriétés des courbes représentatives).

1. Analyse des travaux d'élèves.

Chouquerouste.

Chouquerouste dégaine son logiciel de géométrie, à fond la manette de p (la copie d'écran aurait dû nous montrer les bornes de variations de p, il est assez curieux en observant le curseur que des points aussi près de l'origine soient sur la trace)

Cette fois, il n'en reste pas au stade de l'observation, car de son observation, il tire une conclusion.

Chouquerouste a commencé à faire des mathématiques (il a la notion d'implication). Mais son implication : « Les points sont alignés donc ils décrivent une demi-droite » est purement gratuite. On peut lui faire remarquer que ses points sont alignés mais éparpillés.

On ne peut que conseiller à Chouquerouste de s'impliquer davantage.

Elève 2

Cet élève n'a pas compris le sens de la question
Réussite.
On peut présumer que cet élève a résolu correctement la première question (?).

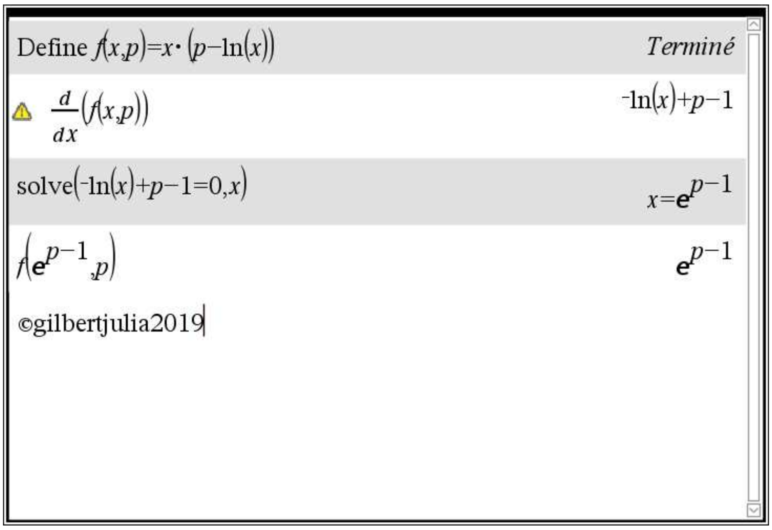
Echec.
Cet élève a modifié le sens de la question en : « Soit S_p le point d'abscisse p et d'ordonnée x_p, quel est l'ensemble de ces points quand p varie ? »
Il fait une confusion entre « coordonnées du sommet » et « expression de x_p en fonction de p ».

On peut penser que cette erreur est due à des mots faussement inducteurs dans l'énoncé. On y lit « Lorsque p parcourt $\mathbf{R}$ » ce qui peut induire que p serait la variable et en conséquence x_p la fonction.

Il faudrait revenir sur le sens de l'énoncé : qu'est-ce qui varie quand « p parcourt $\mathbf{R}$ » ? Cet élève doit prendre conscience que l'abscisse et l'ordonnée de S_p varient *simultanément* et que l'on s'intéresse aux relations mutuelles de ces variations : c'est une relation indépendante de p entre les coordonnées de S_p que l'on cherche.
La trace de Chouquerouste pourrait aider cet élève à appréhender le sens de cette question.

2. Correction de l'exercice.

1. Cette première question amène à la conclusion que, quel que soit le réel p, la fonction f_p admet un maximum pour la valeur $x_p = \exp(p-1)$ et que ce maximum est $f_p(x_p) = \exp(p-1)$



Soit C_p la courbe représentative, dans un repère donné, de la fonction f_p. Le point S_p est le sommet de la courbe C_p et on cherche l'ensemble de ces points quand p varie.
Soient $(x_p\ ;\ y_p)$ les coordonnées de S_p.

Des relations $\begin{cases} x_p = \exp(p-1) \\ y_p = \exp(p-1) \end{cases}$ on déduit une relation indépendante de p entre les coordonnées de S_p :

$y_p = x_p$

Par conséquent, tous les points S_p appartiennent à la droite Δ d'équation $y = x$.

Qu'en est-il de l'affirmation « lorsque p parcourt **R**, l'ensemble des points S_p est une demi-droite » ?

Cette affirmation a pour but d'attirer l'attention sur la notion de *réciproque* : est-ce que *réciproquement* tout point de la droite Δ d'équation $y = x$ est le sommet d'une courbe C_p ? Tel est l'objectif de l'exercice : mettre en valeur la nécessité d'une étude réciproque dans un problème de lieu géométrique.

Soit $M\ (x_0,\ x_0)$ un point de Δ. Il s'agit d'un sommet d'une courbe Cp si on peut trouver un réel p tel que : $\exp(p-1) = x_0$.

- Si $x_0 \le 0$, alors il n'existe aucun réel p tel que $\exp(p-1) = x_0$, le point M n'est pas un sommet d'une courbe C_p
- Si $x_0 > 0$, alors il existe un réel p et un seul tel que $\exp(p-1) = x_0$, c'est le réel $p = 1 + \ln x_0$, le point M est le sommet de la courbe $C_{1+\ln x_0}$

Ainsi, un point de Δ est un sommet Sp si et seulement si son abscisse est strictement positive. L'ensemble des sommets des courbes C_p est la demi-droite ouverte, d'origine O, de support Δ, constituée par les points de Δ d'abscisse strictement positive.