ESD 2019_09 : Probabilités

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

Mathieu et Jeanne ont inventé un jeu avec leur calculatrice. Chaque joueur obtient un nombre aléatoire appartenant à $]0\ ;\ 1]$ sur la calculatrice. Si le produit des deux nombres est inférieur ou égal à 0,5 alors Jeanne gagne sinon c'est Matthieu qui gagne.
Après quelques parties, ils s'aperçoivent que Jeanne gagne très souvent et Mathieu propose alors de remplacer la valeur 0,5 par un autre nombre pour rendre le jeu plus équitable.

La version initiale du jeu avantage-t-elle Jeanne ? Mathieu peut-il rendre ce jeu équitable ?

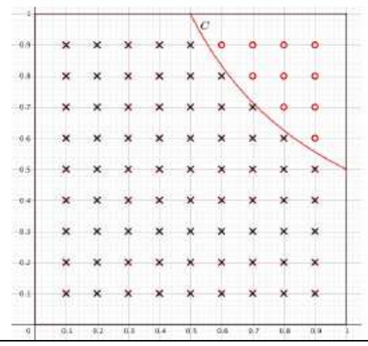
B. Les productions de deux élèves de terminale S

Elève 1
J'ai commencé par réaliser le programme ci-contre pour vérifier que Jeanne gagne très souvent.
J'ai simulé 10000 parties et Jeanne a gagné 8450 fois donc ce jeu avantage effectivement Jeanne.
J'ai remplacé la valeur 0,5 par des valeurs plus petites et à nouveau j'ai simulé 10000 parties.
Avec la valeur 0,19, le jeu semble plus équitable.

```
from random import*
def jouer():
    x=uniform(0,1)
    y=uniform(0,1)
    if x*y<=0.5:
        return "Jeanne"
    else:
        return "Mathieu"
```

Valeurs k qui remplacent 0,5	*0,3*	*0,2*	*0,15*	*0,17*	*0,18*	*0,19*
Victoires de Jeanne sur 10000 parties	*6603*	*5217*	*4405*	*4730*	*4937*	*5023*

Elève 2
Dans ce jeu, c'est comme si dans mon repère ci-contre, on choisissait un point au hasard dans le carré de côté 1*.Les points marqués d'une croix font gagner Jeanne et les autres font gagner Mathieu.*
Mais il y a plein d'autres points et les points qui font gagner Jeanne sont placés sous la courbe C d'équation $y=\dfrac{0,5}{x}$. *L'aire de Jeanne est égale à :*
$0,5+0,5\ln 2 \approx 0,8466$



Pour rendre ce jeu plus équitable, il faut trouver k pour que l'aire sous la courbe d'équation $y=\dfrac{k}{x}$ *soit égale à 0,5. On a donc l'équation à résoudre :* $\displaystyle\int_0^1 \frac{k}{x}dx = 0,5$. *On obtient* $k\ln 1 - k\ln 0 = 0,5$ *mais il y a un problème car* $\ln 0$ *n'existe pas.*

C. Les questions à traiter devant le jury

1. Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez l'accompagnement que vous pourriez leur proposer.

2. Présentez une correction de la deuxième question de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale S.

3. Proposer deux exercices, sur le thème *probabilités*, l'un au niveau lycée et l'autre au niveau collège

2. Eléments de correction

Voici un exercice qui revisite la méthode d'estimation d'une aire par la méthode de Monte-Carlo. Il s'agit d'un authentique problème de recherche (avec « prise d'initiative » par-dessus le marché …), dont la résolution mobilise des connaissances issues de divers domaines des mathématiques (probabilités, géométrie, calcul intégral, …). Le professeur a le choix de pousser la recherche du seuil de jeu équitable soit jusqu'à son existence, soit, plus loin, jusqu'à une valeur approchée de ce seuil.
Quel contraste entre ce riche et intéressant exercice et celui de la veille, esd2019_08 !

1. Analyse des travaux d'élèves.

Escartefigue[1].
Sa présumée production est représentative d'un « élève idéal » de terminale scientifique …

Réussites
Escartefigue a su « élaborer une simulation numérique prenant appui sur la modélisation et utilisant un logiciel ». Le programme qu'il a réalisé simule une partie, et il a dû l'incorporer dans un autre programme comportant une boucle For … EndFor pour simuler un nombre déterminé de parties.
Il a ensuite utilisé cette simulation pour expérimenter et rechercher, de façon empirique, une valeur rendant le jeu équitable. Nous pouvons considérer cette expérimentation comme fructueuse car la valeur qu'il propose est judicieuse et très proche de la valeur idéale.
Echecs
Escartefigue n'est pas en mesure de justifier ses affirmations. Sa première affirmation « *Jeanne gagne plus souvent* » est gratuite et « *la valeur* 0,19 *semble plus équitable* » est une conjecture.

L'accompagnement que l'on peut lui proposer est de réfléchir sur un argument objectif permettant d'étayer ses affirmations. Pourquoi a-t-il simulé 10000 parties, pourquoi pas 10 ? Quel est l'intérêt de simuler un grand nombre de parties ? Est-ce que la notion de « fourchette » lui dit quelque chose ? Il faudrait amener cet élève à évoquer la notion d'intervalle de confiance d'une probabilité.

Elève 2.
La production de cet élève est très intéressante et peut servir de support pour une correction, elle est presque aboutie.

---

[1] Connaissez-vous l'étymologie de ce prénom pagnolesque ? Je ne vous la dirai pas, mais voici un conte édifiant. En principe, il se raconte en catalan. Je le traduis, perdant ainsi une part de truculence linguistique, mais tant pis :
Un beau matin, Chouquerouste et Bougnègue se rencontrent sur les quais de la gare de Perpignan. Chouquerouste attend le TER de 6h14 pour Rivesaltes. Bougnègue, quant à lui, attend le TGV de 6h47 qui, si tout va bien, le déposera 5h07 plus tard à Paris gare de Lyon.
Pour tout bagage, Bougnègue tient sous son bras un lourd panier.
C. Ola, Bougnègue, où tu vas comme ça avec ton panier de figues ? (*Le panier, en effet, est rempli de figues, mures à point, des « coll de senyora », les meilleures du monde, cueillies la veille au soir près de son casot sur les hauteurs de Saint-Michel de Llotes et conditionnnées une par une dans de petites alvéoles)*
B. À Paris.
C. À Paris ? Et qu'est-ce que tu vas y faire ?
B. Je vais y devenir très riche.
C. Très riche ? Avec un panier de figues ???
B. Oui très riche.
C. D'ailleurs, je peux en goûter une ?
B. Non, je n'en donne aucune.
C. ??? Pourquoi tu ne veux pas m'en donner ?
B. Parce que je veux être très riche alors je les garde toutes.
C. ??? Et comment que tu vas devenir très riche ?
B. Ma cousine, elle est montée à Paris l'an dernier. Elle m'a écrit qu'avec une seule, elle s'est acheté un appartement. Alors, moi … avec un panier entier …

Réussites
Cet élève a su modéliser géométriquement une partie jouée par Mathieu et Jeanne par la position d'un point dans un carré de côté 1 (donc d'aire 1). Implicitement, cet élève choisit ainsi, de façon pertinente, comme univers de probabilité le carré $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ muni de la probabilité uniforme, la probabilité d'une partie de ce carré étant égale à son aire.
Il représente l'évènement « Jeanne est gagnante » par une partie judicieusement choisie du carré Ω.
La résolution de la question 1 est correcte. Cet élève a certainement calculé l'aire du domaine « Jeanne est gagnante » en considérant une partition de ce domaine en un rectangle de largeur 0,5 et en un trapèze curviligne dont une frontière était la courbe d'équation $y = \frac{0,5}{x}$. Son résultat est exact.

Echec.
Cet élève n'a pas su transposer le calcul d'aire mené à bien dans la question1 à la question 2, il tente de calculer l'aire d'un domaine illimité ce qui l'amène au calcul d'une intégrale impropre.

Un accompagnement serait d'attirer son attention sur le fait que le domaine auquel appartiennent les points qu'il considère est inclus dans le carré $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ (il y a donc un « plafond » que la courbe d'équation $y = \frac{k}{x}$ franchit et il faut savoir où).
Ainsi, la démarche de cet élève est correcte de bout en bout, mais c'est au niveau calculatoire, plus précisément calcul d'aire, qu'un accompagnement s'impose. Il s'agit de remettre en cause son affirmation : « *il faut trouver k pour que l'aire sous la courbe d'équation* $y = \frac{k}{x}$ *soit égale à 0,5* ». La question à se poser est-elle bien formulée, l'aire à considérer est-elle correctement déterminée ?

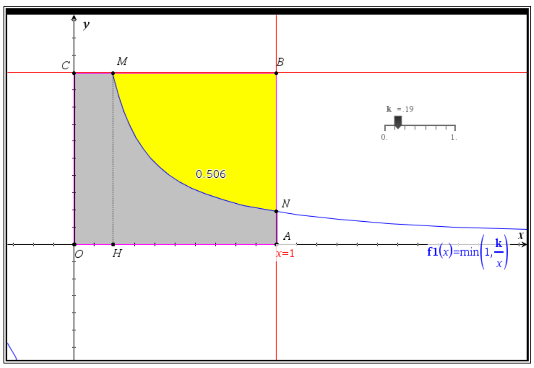
2. Correction de l'exercice.

Chacun des deux élèves ouvre une piste de résolution. Un choix cornélien s'impose.

La question 1 ayant été correctement résolue par l'élève 2, je choisis pour ma part de reprendre sa démarche.
Pour la question 2, je reprends son idée de courbe d'équation $y = \frac{k}{x}$, mais il faut préciser comment représenter l'évènement « Jeanne gagne » et l'évènement « Mathieu gagne ».

<table>
<tr>
<td>
Empiriquement, lorsque $k = 0{,}19$, le jeu est à peu près équitable, comme l'a remarqué l'élève 1. Ce jeu est équitable lorsque l'aire du domaine colorié en jaune (« Mathieu gagne ») est égale à l'aire du domaine grisé (« Jeanne gagne »).

Le domaine grisé est la réunion du rectangle OHMC et du trapèze curviligne HABM.

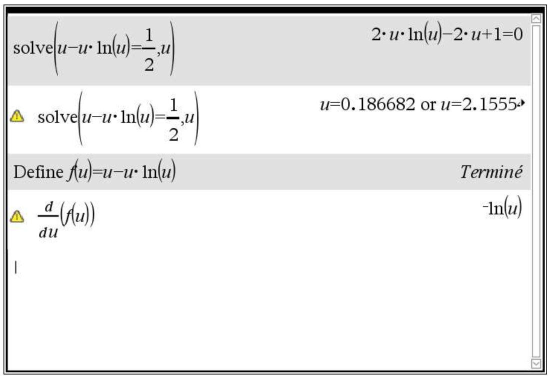
Le point M est le point de la courbe C_k d'ordonnée 1, ses coordonnées sont $M(k, 1)$.
Le rectangle OHMC a pour aire k et le trapèze curviligne HABM a pour aire $\int_k^1 \frac{k}{x}\,dx = -k\ln k$
L'aire grisée est de ce fait égale à $k - k\ln k$.
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

Nous sommes amenés à rechercher s'il existe une valeur réelle k de l'intervalle $]0,\, 1]$ telle que : $k - k\ln k = \frac{1}{2}$.

Lorsqu'elle est en mode Exact, la calculatrice ne sait pas résoudre cette équation (nous non plus nous ne savons pas la résoudre).
En mode Approché, la calculatrice renvoie deux valeurs (obtenues par résolution numérique approchée) dont une et une seule nous intéresse.

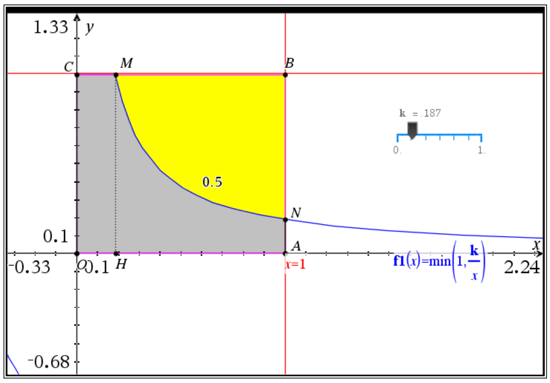
Une étude des variations de la fonction $k \mapsto k(1 - \ln k)$ nous en apprendrait davantage. La dérivée de cette fonction est strictement positive sur $]0,\, 1[$, la fonction $k \mapsto k(1 - \ln k)$ est continue et strictement croissante sur $]0,\, 1]$. Le calcul de la limite en zéro et de la valeur en 1 indique que l'intervalle image est $]0,\, 1]$ lui-même.
Il existe une et une seule valeur α de k dans $]0,\, 1]$ pour laquelle $k - k\ln k = \frac{1}{2}$, la calculatrice nous en suggère un encadrement : $0{,}186 < \alpha < 0{,}187$



- Si $k > \alpha$, l'aire grisée est plus grande que l'aire jaune, le jeu est favorable à Jeanne.
- Si $k < \alpha$, l'aire jaune est plus grande que l'aire grisée, le jeu est favorable à Mathieu.
- Si $k = \alpha$, les deux aires sont égales, le jeu est équitable.

Il existe effectivement une valeur théorique rendant le jeu équitable. Il est possible d'approcher cette valeur, mais il est impossible de la saisir.

Autrement dit, Mathieu ne peut pas rendre le jeu équitable non pas parce qu'il n'existe pas de valeur k convenable mais parce que la valeur convenable est une valeur irrationnelle inaccessible.



En revanche, si Mathieu prévoit le nombre de parties qu'il se propose de jouer, il peut s'arranger pour que la non équité du jeu ne soit pas perceptible. Si Mathieu propose 0,19 le jeu sera très légèrement favorable à Jeanne. S'il propose 0,18, le jeu lui sera très légèrement favorable. Mais dans les deux cas, cette non équité ne serait perceptible qu'au bout d'un très grand nombre de parties.

3. Commentaire

Si l'on adopte le point de vue de l'élève 1, les conclusions seront plus nuancées, c'est pourquoi le point de vue de l'élève 2 me paraît nettement meilleur à promouvoir, c'est celui que je choisirais.

L'étude ci-dessous a pour objectif de développer quelque peu le point de vue de l'élève 1. Ce n'est peut être pas ainsi que procéderait un authentique statisticien (?).

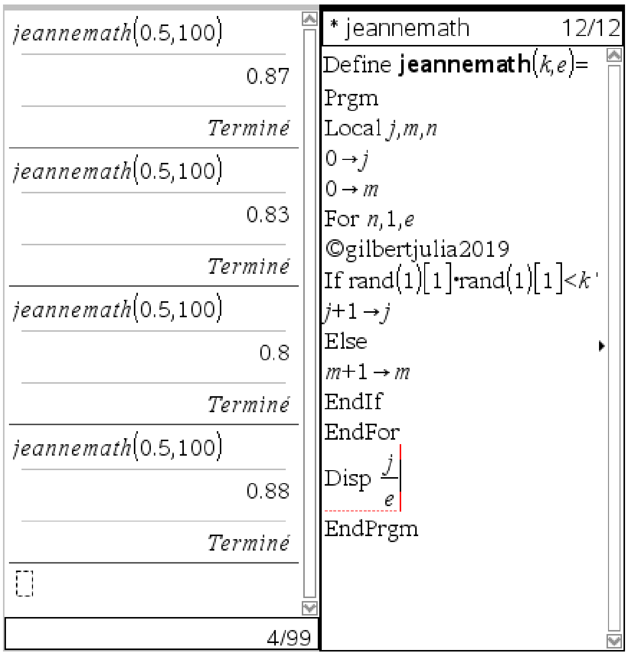
Le programme **jeannemath**, affecté de deux arguments e et k simule une série de e parties en supposant que Jeanne gagne si le produit des deux nombres est plus petit que k.

Soit, pour une valeur k donnée, p_k la probabilité (que nous ne connaissons pas) que Jeanne gagne une partie déterminée, et soit f_k la fréquence observée des parties gagnées par Jeanne lors de la simulation.

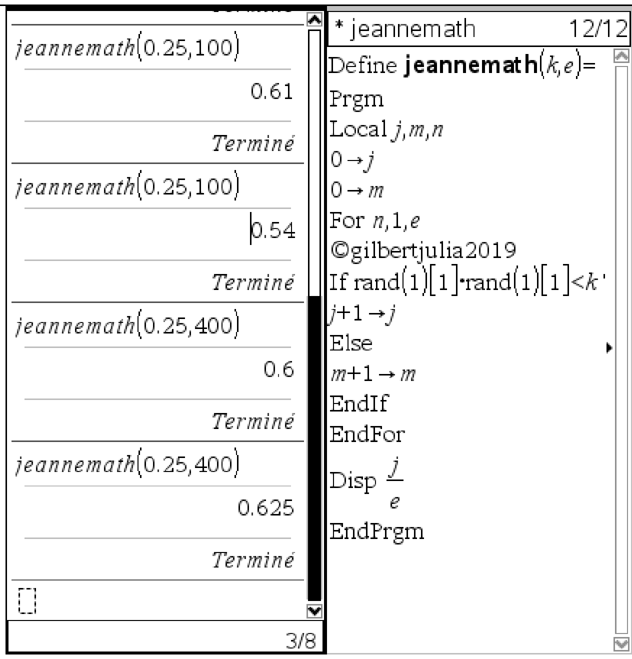
Alors, la probabilité que l'intervalle $\left[f_k - \frac{1}{\sqrt{e}},\ f_k + \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ contienne p_k est au moins égale à 0,95.

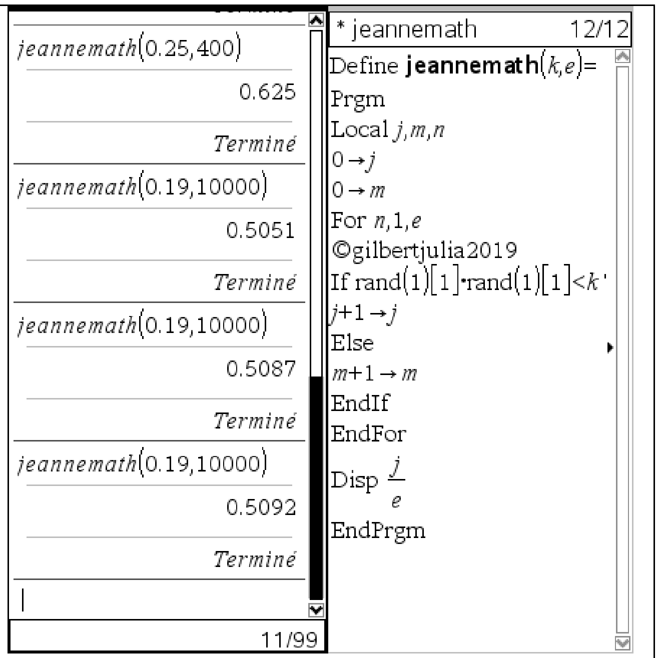
Mais nous ne saurons jamais si cet intervalle contient *effectivement* p_k ou non, nous ne connaissons pas cette valeur.

Une série de 100 essais est en principe suffisante pour établir qu'en effet le jeu est probablement favorable à Jeanne lorsque $k = 0{,}5$.



Pour $k = 0{,}25$, une série de 100 essais peut très bien ne pas s'avérer suffisante pour trancher si le jeu est ou non probablement favorable à Jeanne. En revanche, prévoir une série de 400 essais devrait permettre de prendre une décision.



Pour $k = 0{,}19$, une série de 10000 essais ne rejette pas l'hypothèse d'un jeu équitable. La conclusion d'Escartefigue « *le jeu semble plus équitable* » est tout à fait pertinente : on ne peut pas décider. On ne peut pas prouver que le jeu est équitable (d'ailleurs aucune simulation n'en fournirait la preuve) mais on ne peut pas non plus affirmer que le jeu est favorable à l'un ou à l'autre particulièrement des deux joueurs. La valeur 0,5 est, dans chaque cas où nous avons lancé la simulation, dans l'intervalle de confiance que nous avons obtenu.	
Et pour $k = 0{,}18$, que diriez-vous ?