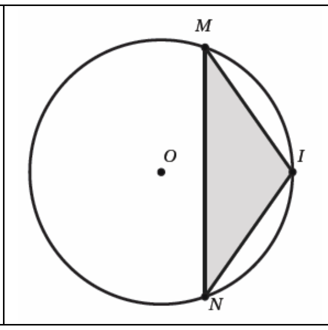
# ESD2019_07. Problèmes avec prise d'initiative

## 1. Le sujet

**A. Exercice**

On considère le cercle $C$ de centre $O$ et de rayon 1 et un point $I$ fixé sur ce cercle. Soit $M$ un point mobile sur ce cercle. On note $N$ son symétrique par rapport à la droite $(OI)$.

Quelle est la nature du triangle $MNI$ lorsque son aire est maximale ?




**B. Les réponses de deux élèves de terminale scientifique.**

**Elève 1.**
*Quand le point M est en I ou en son symétrique par rapport à O, l'aire du triangle est nulle. Par conséquent, l'aire du triangle est maximale quand le point M est à la verticale de O et le triangle OMI est alors rectangle en I.*

**Elève 2.**
*Soit* $\alpha = \widehat{OIM}$ *. Comme le triangle OMI est isocèle en O on a donc* $MI = 2\cos\alpha$*. La droite (OI) coupe (MN) en son milieu H. J'en déduis que* $MH = MI \times \sin\alpha$ *et* $HI = MI \times \cos\alpha$*. Donc l'aire du triangle est égale à* $f(\alpha) = 4\cos^2\alpha.\sin\alpha$*. J'ai cherché où la dérivée s'annule mais je n'y suis pas arrivé.*

### C. Les questions à traiter devant le jury

**1.** Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez en particulier l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

**2.** Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

**3.** Proposez deux exercices sur le thème *problèmes avec prise d'initiative* un au niveau du collège et un au niveau du lycée.

## 2. Eléments de correction

Voici un problème d'optimisation. La « prise d'initiative » dont il est question ici consiste à trouver une modélisation par une fonction permettant d'analyser et de traiter la question posée.

La façon inattendue de poser l'exercice : « quelle est la nature du triangle … » plutôt que plus classique « quel est le triangle d'aire maximale » présente peut-être plus d'inconvénients que d'avantages. Certes, cette formulation a l'avantage d'inciter à « revenir au contexte », mais elle peut induire une interprétation incorrecte du travail demandé (cf élève 1).

**1. Analyse de travaux d'élèves.**

**Elève 1.**

*Réussite :* Aucune[1].
Cet élève est tombé dans le panneau de la nature remarquable du triangle. Il n'a pas cherché à modéliser la situation, il a cherché une position de *M* qui fournissait un triangle *IMN* « remarquable », ce qui l'a dispensé de toute « prise d'initiative ». Il a choisi comme nature celle d'un triangle rectangle isocèle.

Un théorème-élève l'a conforté dans cette idée, théorème qui s'énonce ainsi : « Soit *f* une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ ; si $f(a) = f(b)$, alors *f* présente un extremum juste au milieu de l'intervalle, en $\frac{a+b}{2}$ ».
Ce théorème est exact pour les fonctions trinômes du second degré, familières aux élèves, mais il est évidemment faux en général. Cet exercice, justement, fournit un contre-exemple de ce théorème-élève.

L'erreur de cet élève est due non seulement au théorème-élève qu'il utilise, mais aussi à la façon dont le problème a été posé par le professeur (lequel a clairement une part de responsabilité). Il appartient à ce dernier de recentrer le problème et à recadrer la recherche de cet élève (préciser la consigne).
(NB. Accessoirement, on corrigera le vocabulaire : il n'y a pas de « verticale » dans un plan …)

**Elève 2.**

*Réussites*
La production de cet élève est intéressante car il s'engage dans une modélisation pertinente. Il choisit comme paramètre permettant d'analyser la situation la mesure de l'angle géométrique $\alpha = \widehat{OIM}$ (il fait ainsi preuve « d'initiative »). Ce n'est certes pas le choix optimal, mais on ne peut lui en tenir rigueur.

*Echecs*
C'est au niveau calculatoire que cet élève se heurte à une difficulté. L'expression de l'aire du triangle est incorrecte (un cosinus au carré au lieu d'un cosinus au cube). La dérivée de la fonction $\alpha \mapsto 4\cos^2\alpha.\sin\alpha$ est la fonction $\alpha \mapsto 4\left(1-3\sin^2\alpha\right)\cos\alpha$ ou une expression équivalente (il faudrait savoir laquelle …) :

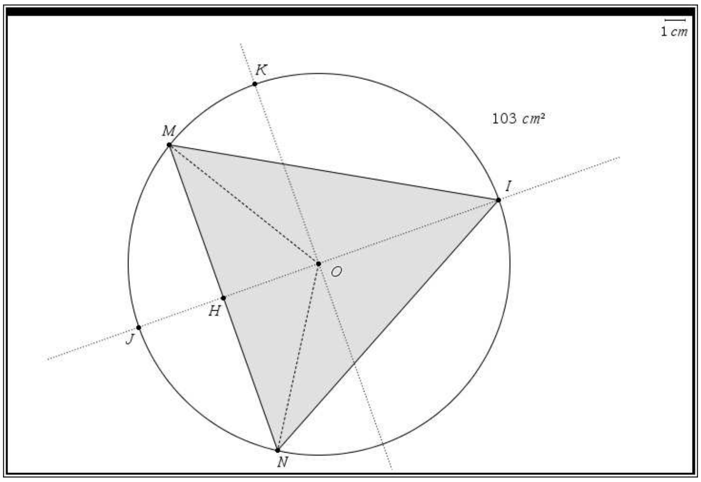
- Ou bien cet élève ne parvient pas à résoudre $1-3\sin^2\alpha = 0$ car il ne reconnaît pas de valeur remarquable.
- Ou bien l'expression de sa dérivée ne se prête pas à une factorisation, style $4\cos\alpha\left(-2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)$.

[1] Je dois préciser une fois pour toutes ce que j'entends par : « *Réussite* : Aucune », mention qui figure dans plusieurs sujets. Je veux dire que, à mon sens, la production de l'élève ne démontre aucune réussite *avérée*. Un candidat au CAPES se doit d'être beaucoup moins péremptoire et de me contredire. Il lui appartient de trouver au moins une « réussite », peu importe laquelle. Le rapport de jury 2019 est très clair à ce sujet. Dans certains cas désespérés, le candidat devra pour cela trouver un subtil équilibre entre présomption, supputation et incantation. Je lui souhaite bien du courage.

Il faudrait commencer par lui faire corriger l'expression de l'aire. Dans la première hypothèse, cet élève aboutira, il aura à résoudre $1-4\sin^2\alpha=0$, et là il y a une valeur remarquable. Dans la deuxième hypothèse, il se heurtera à la même difficulté. Il faudra alors attirer l'attention sur l'utilité de la formule $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$.

**2. Correction de l'exercice**

Présenter une figure (ci-contre). L'aire du triangle *IMN* est égale au produit $IH\times HM$, où *H* est le milieu de [*MN*]. Comment varie cette aire quand *M* ce déplace sur le cercle ? Qu'est-ce qui nous autorise à affirmer qu'il existe une position de *M* pour laquelle cette aire est maximale ?




Eventuellement (ou obligatoirement ? Sainte Geogebra priez pour nous) une figure dynamique peut mettre en évidence que l'on peut obtenir bien mieux que l'aire d'un triangle rectangle isocèle.

L'optimisation de l'aire n'a pas lieu lorsque *M* est sur l'arc *KI*, ni lorsque *M* est sur la perpendiculaire en *O* à (*OI*), ce qui réfute l'argument de l'élève 1, mais pour une certaine position de *M* sur l'arc *KJ*. (On peut la conjecturer).

On insistera sur la nécessité de modéliser. Pour cela nous devons « prendre l'initiative » de choisir un paramètre permettant de décrire la situation et d'exprimer l'aire du triangle. Plusieurs paramètres peuvent être mis en concurrence. En voici trois :

**M1.** On reprend le choix de l'élève 2 : $\alpha=\widehat{OIM}$ où $\alpha$ appartient à l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, mais on peut se contenter de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ (il est nécessaire de préciser l'intervalle d'étude, ce que l'élève 1 n'avait pas fait).

Données utiles : $IM=2\cos\alpha$ (on considère le triangle *IMJ* rectangle en *M*); $IH=2\cos^2\alpha$ ; $HM=2\cos\alpha.\sin\alpha$ ; $aire\ IMN=4\cos^3\alpha.\sin\alpha$

**M2.** On rapporte le plan (orienté) à un repère orthonormé d'origine *O* dans lequel le point *I* a pour coordonnées $(1\ ;\ 0)$ et on utilise comme paramètre une mesure $t$ de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}}\right)$ que l'on peut supposer, sans diminuer la généralité, appartenant à l'intervalle $[0,\pi]$, mais on peut se contenter de $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

Le point *M* a pour coordonnées $(\cos t\ ;\ \sin t)$.

Données utiles : $IH=1-\cos t$ ; $HM=\sin t$ ; $aire\ IMN=(1-\cos t).\sin t$

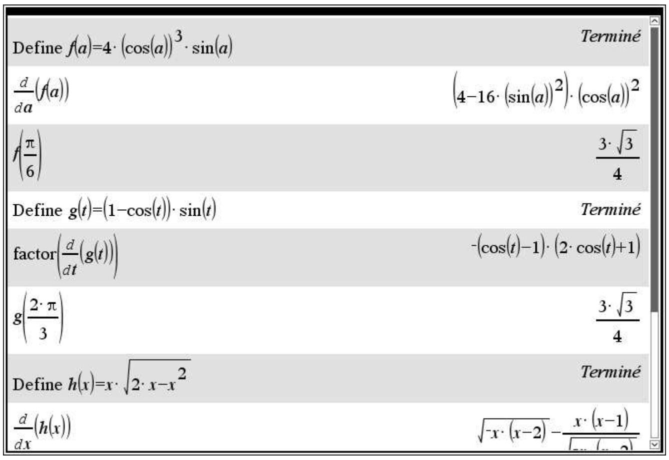
**M3.** On désigne par $x$ la distance : $x = IH$ (voir figure), où $x$ est un réel qui appartient à l'intervalle $[0,\ 2]$, mais on peut se contenter de l'intervalle $[1,\ 2]$ (ce qu'on fera …)

Données utiles : $IH = x$ ; $HM = \sqrt{1-(x-1)^2} = \sqrt{2x - x^2}$ ; $aire\ IMN = x\sqrt{2x - x^2}$

Quelle que soit l'option choisie, c'est la continuité de la fonction « aire » sur un intervalle fermé borné qui nous autorise à affirmer que cette fonction a un maximum qu'elle atteint en un point au moins.

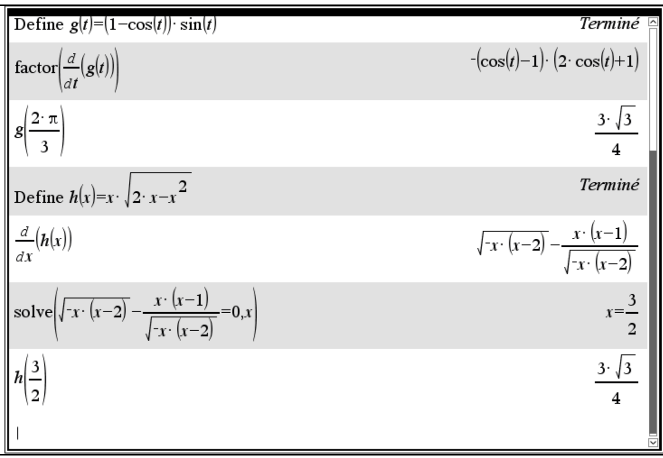
Ci-contre, une étude sommaire des trois fonctions aire obtenues. On constate que le logiciel de calcul formel ne donne pas toujours une expression optimale de la dérivée.

Il reste à comparer les résultats (chouette, ils concordent !) et à revenir au contexte : quel est la nature du triangle qui correspond au cas de maximisation de l'aire ?




En synthèse, on remarquera que plusieurs paramètres permettent de décrire la situation, et on insistera sur les points communs des processus de modélisation (lire REDCM pages 123 et 124).

On observera que la conclusion sur la nature du triangle optimal est indépendante du paramètre retenu pour décrire la situation.
Nous en sommes fort aise …




## 3. Commentaire

Un jour d'oral, les candidats n'ont évidemment pas le temps matériel de comparer tous les choix de paramètre possibles. Du fait que ce sujet est classé dans la « prise d'initiative », il semble bien que l'on soit quand même tenu d'évoquer au moins deux choix.

Peut-être en choisir un qui amène à l'étude d'une fonction trigonométrique, un autre qui amène à l'étude d'une fonction avec un radical.