

ESD 2019_06 : Modélisation

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

Le tableau ci-dessous donne la population de la Syldavie, en milliers d'habitants, tous les dix ans depuis 1950.

Année	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Population	50600	52325	54115	55944	57846	59784	61823

On suppose qu'après 2010, le taux d'évolution de cette population sur chaque décennie est égal au taux d'évolution décennal moyen entre 1950 et 2010.

1. Calculer les taux d'évolution sur chaque décennie.
2. Calculer le taux décennal moyen.
3. Estimer la population en 2030 en expliquant la démarche.

B. Les productions de deux élèves de terminale STMG

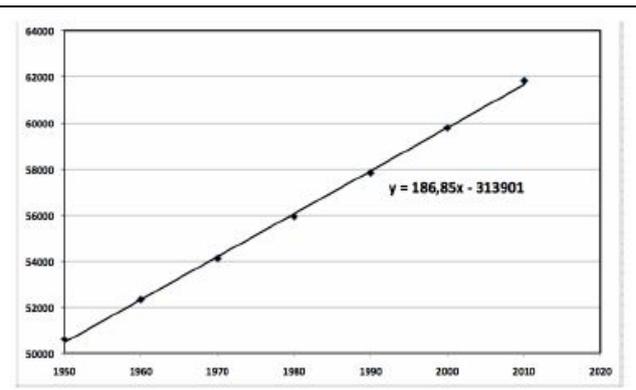
Elève 1

question 3 :

Si après 2010, l'évolution est en moyenne comme entre 1950 et 2010, alors je trace la droite de régression du nuage de points avec la méthode des moindres carrés.

J'obtiens la droite : $y = 186,85x - 313901$.

En 2030, on remplace donc x par 2030 et on obtient 65405 milliers d'habitants.



Elève 2

question 2 : Entre 1950 et 2010, le taux d'évolution est : $\frac{61823 - 50600}{50600} \approx 0,2217 = 22,17 \%$

Donc le taux moyen tous les 10 ans est de $22,17\% \div 6 = 3,696 \%$

question 3 : En 2030, la population en Syldavie sera donc égale à $61823 \times 1,0369^2 = 66477$ milliers d'habitants.

C. Les questions à traiter devant le jury

1. Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez en particulier les aides que vous pourriez leur apporter.
2. Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale STMG.
3. Proposez deux exercices sur le thème *modélisation*, un au niveau du collège et un au niveau du lycée. L'un des exercices devra notamment permettre de développer la compétence « chercher ».

2. Éléments de correction

Voici un exercice classique dans une classe de STMG consistant à étudier sur une période donnée l'évolution d'une population. Plusieurs notions peuvent être abordées dans cet exercice : le taux d'évolution moyen, certes, mais aussi diverses méthodes d'interpolation et d'extrapolation.

<p>Il paraît utile de commencer par présenter les résultats.</p> <p>Ils ont été ajustés, pour information, par la droite d'ajustement au sens des moindres carrés (on reconnaît l'équation de la droite proposée par l'élève 1) et par un ajustement exponentiel.</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>num</th> <th>syl</th> <th>C</th> <th>D</th> <th>E</th> <th>F</th> <th>G</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1950.</td> <td>50600.</td> <td></td> <td>Titre</td> <td>Régression lin...</td> <td>Titre</td> <td>Régression..</td> </tr> <tr> <td>1960.</td> <td>52325.</td> <td>0.034091</td> <td>RegEq...m*x+b</td> <td></td> <td>RegEqn</td> <td>a*b^x</td> </tr> <tr> <td>1970.</td> <td>54115.</td> <td>0.034209</td> <td>m</td> <td>186.85</td> <td>a</td> <td>75.64</td> </tr> <tr> <td>1980.</td> <td>55944.</td> <td>0.033798</td> <td>b</td> <td>-313901.</td> <td>b</td> <td>1.0033</td> </tr> <tr> <td>1990.</td> <td>57846.</td> <td>0.033998</td> <td>r²</td> <td>0.999262</td> <td>r²</td> <td>0.99999</td> </tr> <tr> <td>2000.</td> <td>59784.</td> <td>0.033503</td> <td>r</td> <td>0.999631</td> <td>r</td> <td>0.99999</td> </tr> <tr> <td>2010.</td> <td>61823.</td> <td>0.034106</td> <td>Resid</td> <td>{143.0714285...</td> <td>Resid</td> <td>{-10.09306..</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>0.033951</td> <td></td> <td></td> <td>ResidTra...</td> <td>{-1.994478..</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>gilbertjulia</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>							num	syl	C	D	E	F	G	1950.	50600.		Titre	Régression lin...	Titre	Régression..	1960.	52325.	0.034091	RegEq...m*x+b		RegEqn	a*b^x	1970.	54115.	0.034209	m	186.85	a	75.64	1980.	55944.	0.033798	b	-313901.	b	1.0033	1990.	57846.	0.033998	r ²	0.999262	r ²	0.99999	2000.	59784.	0.033503	r	0.999631	r	0.99999	2010.	61823.	0.034106	Resid	{143.0714285...	Resid	{-10.09306..			0.033951			ResidTra...	{-1.994478..						gilbertjulia								
	num	syl	C	D	E	F	G																																																																													
	1950.	50600.		Titre	Régression lin...	Titre	Régression..																																																																													
	1960.	52325.	0.034091	RegEq...m*x+b		RegEqn	a*b^x																																																																													
	1970.	54115.	0.034209	m	186.85	a	75.64																																																																													
	1980.	55944.	0.033798	b	-313901.	b	1.0033																																																																													
	1990.	57846.	0.033998	r ²	0.999262	r ²	0.99999																																																																													
	2000.	59784.	0.033503	r	0.999631	r	0.99999																																																																													
	2010.	61823.	0.034106	Resid	{143.0714285...	Resid	{-10.09306..																																																																													
			0.033951			ResidTra...	{-1.994478..																																																																													
						gilbertjulia																																																																														
<p>Graphiquement, le nuage de points, la droite d'ajustement au sens des moindres carrés (en magenta) et la courbe de l'ajustement exponentiel (en vert).</p> <p>Les extrapolations pour 2030 commencent à présenter un écart, encore peu important (on reconnaît le résultat de l'élève 1 et l'ajustement exponentiel donne un résultat plus petit que celui de l'élève 2).</p>																																																																																				
	<p>80000 y</p> <p>$f_2(x) = 75.6 \cdot (1.)^x$</p> <p>$f_1(x) = 187. \cdot x + 3.14E5$</p> <p>(2030, 66093)</p> <p>(2030, 65405)</p> <p>gilbertjulia2019</p> <p>(num, syl)</p> <p>x=2030</p> <p>1940 x 2080</p>																																																																																			

1. Analyse des travaux d'élèves.

Elève 1

Cet élève répond parfaitement à la consigne, que nous rappelons : « Estimer la population en 2030 en expliquant la démarche ». Il choisit un ajustement linéaire.

La validation ou non de sa démarche dépend de sa réponse à une question qu'il faudrait impérativement lui poser : que signifie pour toi « l'évolution est en moyenne comme entre 1950 et 2010 » ? Que signifie pour toi « en moyenne » ?

S'il répond qu'il a considéré que l'augmentation de population chaque 10 ans (c'est à dire l'écart $P_{1950+10(n+1)} - P_{1950-10n}$) est grosso modo constant, alors nous validerons sa démarche, elle est cohérente.

En revanche, s'il répond que le taux d'augmentation (c'est à dire le quotient $\frac{P_{1950+10(n+1)}}{P_{1950-10n}}$) est grosso modo constant, alors sa démarche est non cohérente et invalide, ce n'est pas la droite des moindres carrés qui représente cette modélisation.

Dans le premier cas, nous respecterions sa façon de penser, une « aide » serait seulement de lui proposer de rechercher *une autre façon de modéliser*, indépendante de la sienne.

Dans le deuxième cas, une « aide » serait de remettre en cause son choix de la droite des moindres carrés qui ne correspondrait pas du tout à sa notion de « moyenne ».

Elève 2.

Cet élève calcule correctement le taux d'évolution global entre 1950 et 2010 (*réussite*).

Il utilise ensuite un théorème en acte incorrect : « le taux moyen est le quotient du taux global par le nombre d'échéances ». De ce fait, sa modélisation est invalide et sa réponse à la question 3 n'est pas recevable.

Cette erreur peut être provoquée par la façon de poser l'exercice (les taux d'évolution sur chaque décennie n'ont aucune utilité pour le calcul du taux décennal moyen. Ils induisent une idée fautive de moyenne arithmétique : l'enseignant qui a posé l'exercice endosse une part de responsabilité dans cette erreur).

Pour remettre en cause sa démarche, on pourrait lui proposer de faire les calculs en se basant sur le population initiale de 1950 : « Normalement, tu devrais retrouver le même résultat, essaie pour voir ». Il trouverait $50600 \times 1,0369^8 \approx 67650$, différent de son propre résultat. De même, il ne retrouverait pas la population de 2010 : $50600 \times 1,0369^6 \approx 62913$, alors qu'il devrait la retrouver exactement.

2. Correction de l'exercice.

<p>Les taux d'évolution décennaux.</p> <p>Pour information, la moyenne des taux a été calculée en cellule C8. Le résultat obtenu est intéressant ...</p>	
<p>On calcule le taux d'évolution global T_G entre 1950 et 2010, taux qui est égal à 0,2218 à 10^{-4} près, soit en pourcentage 22,18 % à 0,01 % près.</p> <p>On constate que ce taux d'évolution global n'est pas égal à six fois la moyenne des taux décennaux, comme le pensait l'élève 2. De même, le sixième du taux d'évolution global est supérieur à tous les taux décennaux. Pourquoi ces paradoxes ?</p>	
<p>L'explication en est la suivante : Le « taux d'évolution décennale moyen » est le taux qu'il faudrait appliquer chaque décennie pour obtenir le même taux global d'évolution à la fin de la période observée.</p> <p>Cette période couvrant six décennies, c'est le nombre t_M tel que : $(1 + t_M)^6 = 1 + T_G$</p> <p>Il n'y a cependant aucun écart significatif entre ce nombre et la moyenne des taux calculée précédemment en C8.</p>	

3. Commentaires

1. L'énoncé est sujet à une critique :

Pour calculer un taux d'évolution moyen, les taux d'évolution par décennie ne servent à rien. La question 1 est, sinon malvenue, en tout cas très mal placée. D'ailleurs, il semble bien que cette question 1 soit à l'origine de l'erreur d'un élève dans la question 2. Elle ne pourrait se justifier que si le professeur se sert de cette question pour mettre en évidence la distinction nécessaire entre taux d'évolution moyen et moyenne des taux décennaux. (Il arrive parfois que l'on pose une question « provocatrice », justement pour inciter à la faute). Est-ce le cas ici ? Ce n'est pas certain. En effet les taux décennaux sont très voisins les uns des autres. De ce fait, on ne distingue aucun écart entre d'une part le taux d'évolution moyen et d'autre part la moyenne des taux. D'où l'émergence probable d'un faux théorème : « Le taux moyen, c'est la moyenne des taux ». Il faudra, dans un autre exercice ou avec d'autres données, tenter de réfuter ce faux théorème.

Il est donc permis de mettre en cause le choix des données. Il semble bien que, pour fabriquer la statistique de cette population tintinophile, l'auteur du sujet a pris les puissances de 1,034 puis a modifié les résultats de quelques unités, tantôt dans un sens tantôt dans l'autre. Il aurait dû les modifier plus vigoureusement !

Nous voyons ici une tendance parfois caractéristique de certains manuels de la filière STMG : à force de réduire le programme de mathématiques de cette filière, on en arrive à proposer des exercices qui caricaturent l'esprit des mathématiques. Certes, nous sommes loin ici de la sottise du sujet ESD2018_3c04 que j'ai torpillé en son temps. Mais tout de même, nous voyons un cas où il n'y a pas de réelle réflexion sur la pertinence du lien entre les deux questions posées.

Malheureusement, dans un certain nombre de manuels de cette filière, les notions mathématiques du programme sont exposées aux élèves comme on expose des vieilles nippes dans un vide greniers ou des saucisses dans un Burger King. Cette tendance semble prendre de l'ampleur et s'étendre à d'autres filières.

2. Ce sujet se prêterait à une intéressante comparaison d'au moins deux modélisations. D'une part les partisans d'une évolution affine, dont l'élève 1 est le porte-parole, et d'autre part les partisans d'une évolution exponentielle (que l'enseignant voulait maladroitement promouvoir). Les prévisions pour 2030 sont assez proches. En revanche, pour 2080, les prévisions s'écartent significativement l'une de l'autre, le choix de la modélisation devient décisif.

3. Il existe, parmi bien d'autres évidemment, trois modèles d'évolution particulièrement importants qu'un candidat au CAPES se doit de connaître et de savoir caractériser : linéaire, exponentiel, logistique (voir REDCM pages 125 et 126).