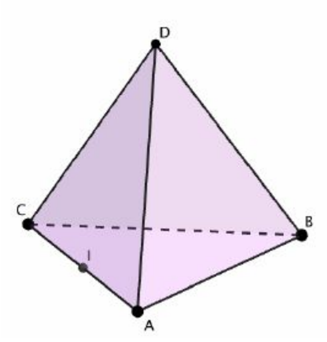
ESD2019_05. Géométrie dans l'espace

1. Le sujet



A. Exercice

On considère un tétraèdre régulier $ABCD$ d'arête a. On note I le milieu du segment $[AC]$.

Donner une valeur approchée à 10^{-2} radian de l'angle $\widehat{DBI}$.

B. Les réponses de deux élèves de terminale scientifique

Elève 1

Je me place dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right)$.

Le point I a pour coordonnées $\left(0,\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$ *donc* $\overrightarrow{BI}$ *a pour coordonnées* $\overrightarrow{BI}\left(-1,\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$ *et* $\overrightarrow{BD}$ *a pour coordonnées* $\overrightarrow{BD}(-1,\ 0,\ 1)$ *donc* $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BD}=1$

J'en déduis $\cos\widehat{DBI}=\dfrac{\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BD}}{BI\times BD}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ *donc* $\widehat{DBI}=\cos^{-1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$*. Je ne comprends pas le problème car ce n'est pas possible.*

Elève 2

Je sais que la hauteur d'un triangle équilatéral de côté c est $c\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Le triangle DBI est rectangle et isocèle en I car $BI=DI=a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Par conséquent $\widehat{DBI}=\dfrac{\pi}{4}=0{,}79$ *radian.*

2. Eléments de correction

Le tétraèdre régulier se prête à des calculs de grandeurs divers et variés. Nous en avons un exemple aujourd'hui.

1. Analyse de travaux d'élèves.

Aucun des deux élèves ne donne une réponse satisfaisante, le premier car sa démarche n'a aucune chance d'aboutir et le second à cause d'une idée reçue.

Elève 1
Cet élève choisit de se placer dans le cadre de la géométrie analytique.

Réussite.
Si on fait abstraction du choix du repère, qu'il pense être un repère orthonormal, la démarche de cet élève est cohérente avec la représentation qu'il se fait de la situation. Les coordonnées des vecteurs utiles sont correctes, de même que l'expression du cosinus d'un angle en fonction d'un produit scalaire et de normes.

Echecs.
Cet élève choisit un repère qui n'est pas orthonormal (il est possible qu'un exercice précédent ait eu à voir avec un cube, ou à la rigueur un parallélépipède rectangle, dans lequel le choix d'un repère semblable s'avérait judicieux, ce qui expliquerait son erreur par effet de contrat : « dans l'espace, je me place toujours dans un repère utilisant les points importants de l'énoncé »). Ce choix malheureux est rédhibitoire.

On note que le résultat $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ne lui paraît pas étrange au premier abord. C'est seulement parce que sa calculatrice affiche un message d'erreur qu'il se rend compte d'une « impossibilité ». Cela ne l'amène pas à rechercher une cause de cette étrangeté.

Peut-être conviendrait-il de lui demander ce qu'il pense des angles de sommets A des faces du tétraèdre. Est-ce « raisonnable », pour un repère censé être orthonormal, que les vecteurs de base déterminent deux à deux des angles de mesure $\frac{\pi}{3}$?

Elève 2

Réussite
Cet élève tente d'extraire une figure plane remarquable de la figure de l'espace. C'est une idée intéressante que l'on fera aboutir.

Echec.
Cet élève croit reconnaître un triangle remarquable, en appliquant un théorème-élève incorrect : « Si dans un triangle isocèle de base a les côtés égaux mesurent $a\frac{\sqrt{3}}{2}$, alors ce triangle est aussi rectangle ». Il obtient donc une mesure inexacte de l'angle recherché.

On pourrait lui demander si le théorème de Pythagore est bien vérifié dans ce triangle DBI censé être rectangle : « vérifie quand même pour voir... »

2. Correction de l'exercice

Passer au cadre de la géométrie analytique ne semble pas être un bon plan, car aucun repère orthonormal « simple » ne semble s'imposer.

La démarche de l'élève 2 est plus prometteuse. Il est possible de calculer les longueurs des trois côtés du triangle isocèle *DBI*, comme l'a fait cet élève : $BI = DI = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $BD = a$.
Mais ce triangle n'est pas pour autant rectangle isocèle.

Le cosinus de l'angle auquel on s'intéresse est égal à $\dfrac{BD}{2\,DI}$.

On aboutit à $\cos \widehat{DBI} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et à $\widehat{DBI} = \cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$, soit 0,96 à 0,01 radian près.

Le résultat en degrés est plus parlant qu'en radians : 54,7 degrés à 0,1 degré près. Moins qu'un angle de base d'un triangle équilatéral, mais plus que l'angle de base d'un rectangle-isocèle.

Sur une même figure, le triangle *BDI* dont il est question dans cet exercice, et ses deux rivaux, *BDK* rectangle isocèle et *BDJ* équilatéral.

On a mentionné aussi une valeur approchée à 0,1 degré près de l'angle $\widehat{BID} = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)$, qui est l'angle-dièdre de deux faces du tétraèdre régulier, angle que l'on étudie un peu plus souvent que celui du présent exercice.