ESD 2019_04 : Conjecture et démonstration

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

On considère les paraboles d'équation $y = a x^2 + b x + c$ où a, b et c sont des réels, avec a non nul.

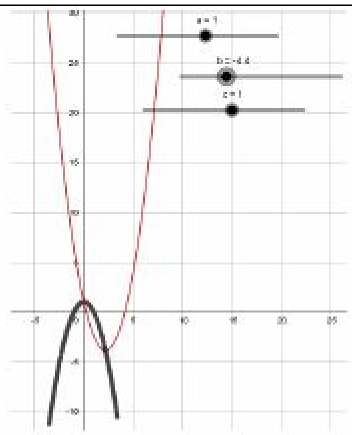
1. Quel est le lieu des sommets de ces paraboles lorsque b varie dans **R**, a et c étant fixés ?

2. On fixe $c = 1$. Tout point du plan est-il le sommet d'une de ces paraboles?

B. Les productions de deux élèves de première S à la question 1.

Elève 1

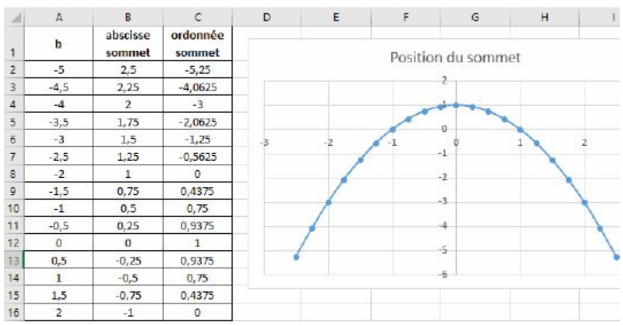
En utilisant un logiciel de géométrie et en activant la trace du sommet, nous pouvons constater qu'il se déplace sur une parabole.



Elève 2

Le sommet S d'une parabole d'équation $y = a x^2 + b x + c$ *a pour coordonnées* $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$. *Comme je ne vois pas quel est le lieu des sommets, j'ai utilisé un tableur.*

J'ai fixé $a = 1$ *et* $c = 1$ *pour obtenir une représentation graphique de la position du sommet : c'est une parabole d'équation* $y = 1 - x^2$.



	A	B	C
1	b	abscisse sommet	ordonnée sommet
2	-5	2,5	-5,25
3	-4,5	2,25	-4,0625
4	-4	2	-3
5	-3,5	1,75	-2,0625
6	-3	1,5	-1,25
7	-2,5	1,25	-0,5625
8	-2	1	0
9	-1,5	0,75	0,4375
10	-1	0,5	0,75
11	-0,5	0,25	0,9375
12	0	0	1
13	0,5	-0,25	0,9375
14	1	-0,5	0,75
15	1,5	-0,75	0,4375
16	2	-1	0

C. Les questions à traiter devant le jury

1. Analyser ces productions d'élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez l'aide que vous pourriez leur apporter.

2. Présenter une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première S.

3. Proposer deux exercices sur le thème *conjecture et démonstration*, l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée.
L'un au moins des exercices devra permettre notamment de développer la compétence « communiquer ».

2. Eléments de correction

1. Analyse des travaux d'élèves.

Chouquerouste.

Chouquerouste dégaine son logiciel de géométrie, à fond les manettes, notamment celle de *b*.
Il en reste au stade de la conjecture (contrairement à ce qu'il affirme, le « déplacement sur une parabole » n'est pas un « constat » mais seulement une conjecture).

On ne peut que conseiller à Chouquerouste de commencer à faire des mathématiques.

Bougnègue.

Bougnègue dégaine son tableur, mais pas tout de suite, pas trop vite.

Les productions des deux élèves, qui illustrent l'exploitation de deux outils logiciels différents, ne sont en effet pas équivalentes. Alors que Chouquerouste n'est que spectateur, Bougnègue quant à lui utilise son tableur pour trouver une réponse à une interrogation qu'il a lui même formulée.

Réussites.
Bougnègue a identifié correctement le problème : il s'agit de déterminer la trajectoire du point de coordonnées $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ lorsque b varie. C'est un point clef de l'étude de cette situation.
Il utilise son tableur pour conjecturer cette trajectoire (Bougnègue fait preuve d'une « prise d'initiative »). Lorsque $a = c = 1$ son affirmation « *c'est une parabole d'équation* $y = 1 - x^2$ » a un statut qui dépasse celui de la conjecture : la trajectoire est incluse dans ladite parabole. Autrement dit, dans le cas particulier $a = c = 1$, la phase d'*analyse* du lieu géométrique du sommet est correcte.

Echecs.
Il manque deux choses à sa production : une phase de *synthèse* (réciproque) dans le cas particulier $a = c = 1$, et ensuite une généralisation des résultats à a et c réels donnés.

Il est possible que l'obstacle qui empêche Bougnègue de « voir quel est le lieu du sommet » est uniquement le fait qu'il n'a pas explicité l'expression du discriminant delta en fonction de *a, b, c*. Il faudrait s'en assurer.

2. Correction de l'exercice.

Désignons par $P(a,\, b,\, c)$ la parabole d'équation $y = a\,x^2 + b\,x + c$

On revient sur la notion de « sommet » d'une parabole. Bougnègue dit une chose très intéressante, ce sommet S aurait pour coordonnées $\left(-\dfrac{b}{2\,a},\, -\dfrac{\Delta}{4\,a}\right)$.

Explicitons davantage :

Ce sommet S a pour coordonnées $\begin{cases} x_S = -\dfrac{b}{2\,a} \\ y_S = \dfrac{4\,a\,c - b^2}{4\,a} \end{cases}$ où a et c sont fixés et où b décrit **R**.

On peut proposer de résoudre la première question en deux temps.

Dans un premier temps, on propose de résoudre le problème dans le cas particulier $a = c = 1$, qui est présent dans les deux productions d'élèves.

Dans le cas particulier $a = c = 1$, nous obtenons : $\begin{cases} x_S = -\dfrac{b}{2} \\ y_S = \dfrac{4 - b^2}{4} = 1 - \dfrac{b^2}{4} \end{cases}$.

Il apparaît une relation indépendante de b entre les deux coordonnées : $y_S = 1 - {x_S}^2$. Le sommet S de la parabole $P(1,\, b,\, 1)$ appartient à la parabole d'équation $y = 1 - x^2$.

Est-ce que *réciproquement* tout point de cette parabole est le sommet d'une parabole $P(1,\, b,\, 1)$,
Oui, le point de coordonnées $(x,\, 1 - x^2)$ où x est un réel donné est le sommet de la parabole $P(1,\, 2\,x,\, 1)$

Donc, l'ensemble des sommets des paraboles $P(1,\, b,\, 1)$ est la parabole d'équation $y = 1 - x^2$ en entier.

Dans un deuxième temps, on généralise. Eventuellement les manettes relatives à a et à c du logiciel de Chouquerouste pourraient mettre en évidence que le lieu du sommet n'est pas toujours la même parabole.

Il s'agit de trouver une relation indépendante de b entre les deux coordonnées : $\begin{cases} x_S = -\dfrac{b}{2\,a} \\ y_S = \dfrac{4\,a\,c - b^2}{4\,a} \end{cases}$, ce qui amène à la relation : $y_S = c - a\,{x_S}^2$.

Les sommets de toutes les paraboles, b variant et a et c restant fixes, appartiennent à la parabole d'équation $y = c - a\,x^2$.

Réciproquement, soit $M\left(x_0\ ;\ c-a\,x_0{}^2\right)$ un point de cette parabole. Si on considère le nombre réel $b=-2\,a\,x_0$, alors les coordonnées de M s'expriment en fonction de b : $M\left(-\dfrac{b}{2\,a}\ ;\ c-a\left(\dfrac{b^2}{4\,a^2}\right)\right)$ c'est à dire $M\left(-\dfrac{b}{2\,a}\ ;\ \dfrac{4a\,c-b^2}{4\,a}\right)$. Ce point est le sommet de la parabole $P\left(a,\ -2\,a\,x_0,\ c\right)$.

L'ensemble des sommets de toutes les paraboles, b variant et a et c restant fixes, est la totalité de la parabole d'équation $y=c-a\,x^2$.

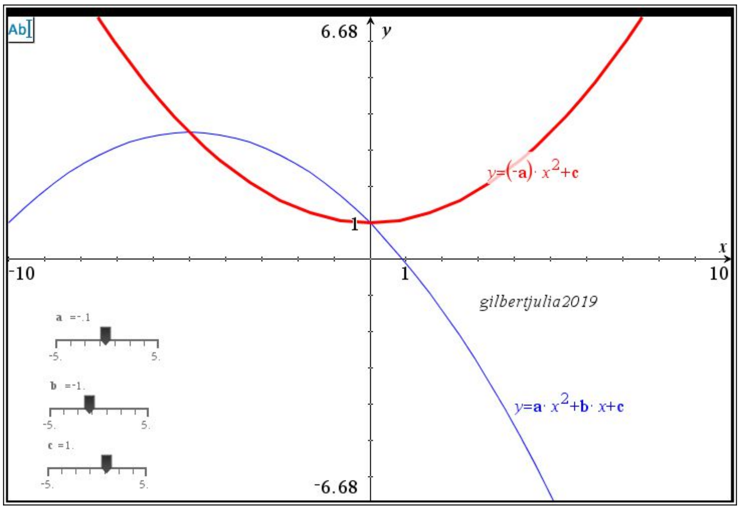
2. Si on fixe $c=1$, la parabole précédente a pour équation $y=1-a\,x^2$.

Un point M du plan de coordonnées $M\ \left(x_M\ ,\ y_M\right)$ est un sommet de parabole si et seulement si il existe un réel a tel que $y_M\ =1-a\,x_M{}^2$.

Nous sommes amenés à développer une discussion à propos de la valeur de l'abscisse de M :

- Si $x_M\ \neq 0$, le réel $a=\dfrac{1-y_M}{x_M{}^2}$ convient et c'est le seul : Le point M est le sommet d'une unique parabole, la parabole $P\left(\dfrac{1-y_M}{x_M{}^2},\ -2\dfrac{1-y_M}{x_M},\ 1\right)$.
- Si $x_M\ =0$ et $y_M\ \neq 1$ aucun réel a ne convient. Le point M n'est le sommet d'aucune parabole.
- Si $x_M\ =0$ et $y_M\ =1$ quel que soit le réel non nul a, le point M est le sommet de la parabole. $P\left(a,\ 0,\ 1\right)$

Une utilisation de logiciel semblable à celle attribuée à l'élève Chouquerouste est opportune pour illustrer les résultats.

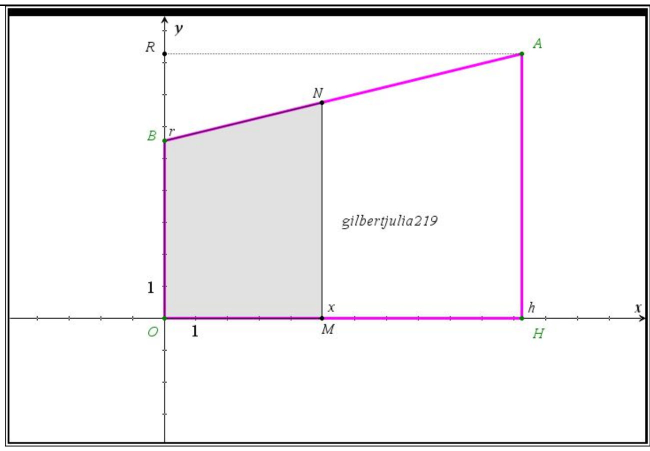


3. Exercice où l'on communique à ma façon

Partie A.
On se donne deux réels strictement positifs h et R ainsi qu'un réel r vérifiant $0 \leq r \leq R$.
Dans le repère orthonormé d'origine O ci-contre, on considère les points $H(h\ ;\ 0)$, $A(h\ ;\ R)$ et $B(0\ ;\ r)$.

Soit également x un nombre réel tel que $0 \leq x \leq h$, M le point de coordonnées $M\ (x\ ;\ 0)$ et N le point d'intersection de la droite (AB) avec la perpendiculaire en M à l'axe Ox.

L'unité de longueur est le centimètre.



1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

2.1. Soit S le solide engendré par la rotation du trapèze $OHAB$ autour de l'axe Ox. À l'aide d'une intégration, déterminer le volume V du solide S.

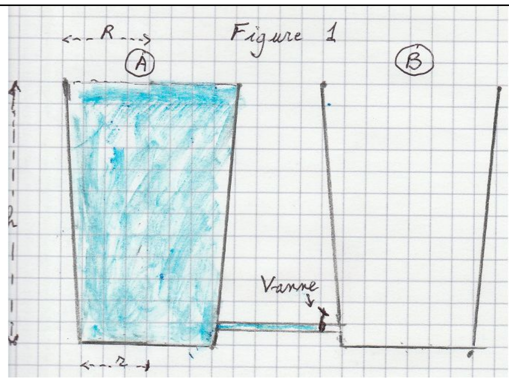
2.2. Quelles formules retrouve-t-on lorsque $r = 0$? Lorsque $r = R$?

3. Soit S_x le solide engendré par la rotation du trapèze $OMNB$ autour de l'axe Ox. À l'aide d'une intégration, déterminer en fonction de x le volume $V(x)$ du solide S_x.

4. Application numérique : $r = 3$; $R = 4$; $h = 12$. Calculer V ; calculer $V(6)$

Partie B.
Deux vases évasés identiques A et B en forme de tronc de cône de hauteur h et de rayons de base r et R sont posés côte à côte sur une table horizontale (figure 1 ci-contre).

Le vase A est plein à ras bord du liquide de votre choix (suggestion : Berlou Schisteil 2017). Le vase B est vide. Par l'entremise d'un fin tuyau de volume négligeable équipé d'une vanne, ces deux vases ont acquis l'un et l'autre la compétence « communiquer » à tel point que lorsqu'on ouvre la vanne, le liquide contenu dans A se répand dans B jusqu'à ce que les niveaux de liquide dans A et dans B soient équilibrés.



1. Soit x le niveau de liquide dans les deux vases lorsqu'ils sont à l'équilibre. Montrer que x est solution d'une équation au troisième degré que l'on écrira.

2. Application numérique : donner un encadrement de x d'amplitude 10^{-3} lorsque $r = 3$; $R = 4$; $h = 12$

Eléments de correction.
Partie A.

1. $f(x)=r+\dfrac{R-r}{h}x$

2 et 3. Pour tout réel x de l'intervalle $[0 \quad h]$, $V(x)=\pi.\int_0^x (f(t))^2\,dt=\pi.\int_0^x \left(r^2+2.\dfrac{R-r}{h}r\,t+\dfrac{(R-r)^2}{h^2}t^2\right)dt$

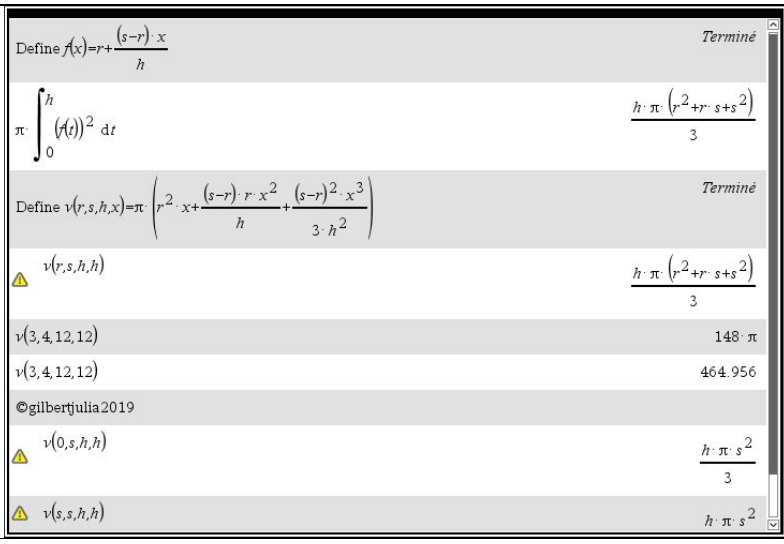
$$V(x)=\pi.\left[r^2\,t+\frac{R-r}{h}r\,t^2+\frac{(R-r)^2}{h^2}\frac{t^3}{3}\right]_0^x=\pi.\left(r^2\,x+\frac{R-r}{h}r\,x^2+\frac{(R-r)^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\right).$$

En particulier : $V=V(h)=\pi.\left(r^2\,h+(R-r)r\,h+(R-r)^2\dfrac{h}{3}\right)=\dfrac{h}{3}\left(r^2+R\,r+R^2\right)$. Lorsque $r=0$, on retrouve le volume d'un cône et lorsque $r=R$ celui d'un cylindre.

4. *Le rayon de la grande base est noté s ci-contre, la majuscule R n'étant pas prise en compte par le logiciel utilisé.*

L'application numérique donne $V=148\,\pi$, soit 465 cm^3 à 1 cm^3 près.

On obtient aussi : $V(6)=\dfrac{127\,\pi}{2}$, soit 200 cm^3 à 1 cm^3 près. Lorsque le vase est rempli à mi-hauteur, il contient évidemment moins de la moitié du volume disponible.



Partie B.

1. Puisque les deux vases sont identiques et que la hauteur de liquide est la même dans les deux vases, les volumes de liquide sont les mêmes dans les deux vases. Chacun d'eux contient la moitié du volume de liquide initialement contenu dans le vase A.

La hauteur de liquide x dans chacun des deux vases est telle que : $V(x)-\dfrac{V}{2}=0$

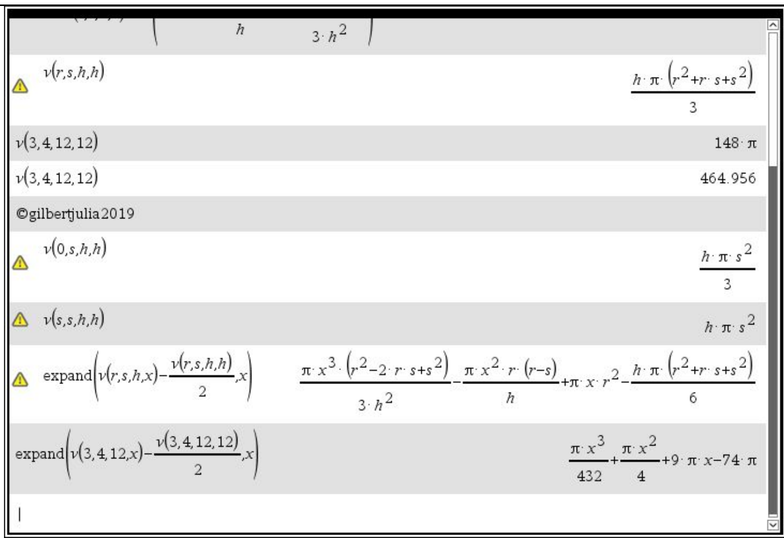
$$V(x)-\frac{V}{2}=0 \Leftrightarrow \frac{(R-r)^2}{3h^2}x^3+\frac{r(R-r)}{h}x^2+r^2\,x-\frac{h\left(R^2+r\,R+r^2\right)}{6}=0$$

Le réel x est solution d'une équation au troisième degré.

La fonction $x\mapsto V(x)-\dfrac{V}{2}$ étant notoirement continue et strictement croissante sur $[0\ ;\ h]$, et changeant de signe sur cet intervalle, il existe une et une seule valeur de x appartenant à $[0\ ;\ h]$ et vérifiant cette équation.

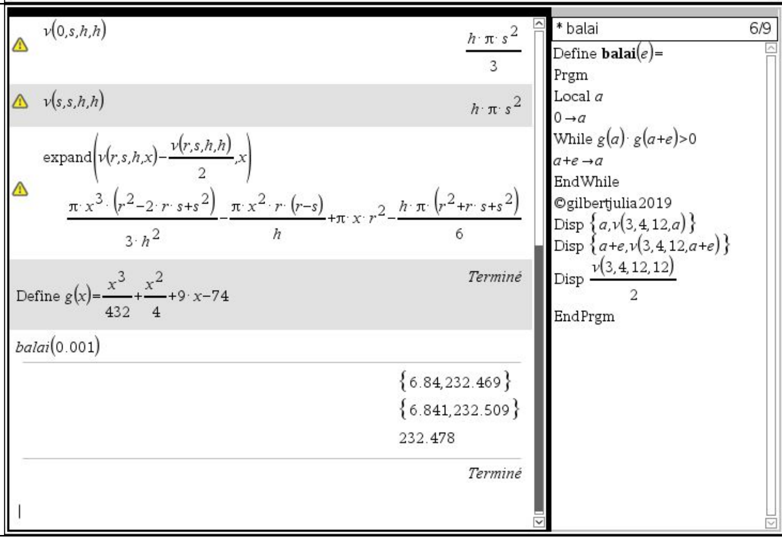
2. Comme on le voit, cet exercice est un exemple de « problème amenant à résoudre une équation ». En agissant sur le choix des paramètres *h, r, R*, on peut faire varier l'équation du troisième degré à laquelle on aboutit.

Lorsqu'on choisit $r = 0$ (cas d'un cône), l'équation est de la forme $a\,x^3 - b = 0$



Lorsque $r = 3$; $R = 4$; $h = 12$, l'équation du troisième degré s'écrit : $\dfrac{x^3}{432} + \dfrac{x^2}{4} + 9\,x - 74 = 0$.

Un petit programme de balayage donne $6{,}84 < x < 6{,}841$



Je me souviens avoir donné il y a un certain nombre d'années le même exercice libellé ainsi :
« Un pot en forme de tronc de cône de rayons de base 5 cm et 8 cm et de hauteur 18 cm contient de l'eau. Il est à moitié plein. Faites une enquête. »

L'idée était de discuter sur le sens de « à moitié plein ». Si on considère qu'il est rempli à mi-hauteur, alors il y a moins d'un litre d'eau dans le pot (940 cm^3 environ).

Si on considère qu'il contient la moitié du volume du pot, alors la hauteur d'eau atteint presque 11 cm, elle est comprise entre 10,975 et 10,976.