ESD 2019_03 : Probabilités

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

On dispose de deux pièces A et B. La probabilité d'obtenir Pile avec la pièce A est égale à $\frac{1}{3}$. Avec la pièce B, cette probabilité est égale à $\frac{1}{2}$. On effectue n lancers de chaque pièce, avec $n \geq 4$.
A-t-on plus de chances d'obtenir trois fois exactement Pile avec la pièce A ou avec la pièce B ?

B. Les productions de deux élèves de terminale

Elève 1
En utilisant un tableur et en faisant varier n, j'ai comparé la probabilité d'avoir trois fois pile avec la pièce A et la probabilité d'avoir trois fois pile avec la pièce B.
Je trouve que c'est vrai à partir de 8.

	A	B	C
1	*n*	*pièce A*	*pièce B*
2	4	9,9E-02	2,5E-01
3	5	1,6E-01	3,1E-01
4	6	2,2E-01	3,1E-01
5	7	2,6E-01	2,7E-01
6	8	2,7E-01	2,2E-01
7	9	2,7E-01	1,6E-01

Elève 2
Je nomme p la probabilité d'obtenir pile à chaque lancer.
Par indépendance des lancers successifs, j'obtiens la probabilité d'avoir trois fois pile avec une pièce :
$p^3(1-p)^{n-3}$

Je dois comparer $\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}$ *et* $\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ *mais je n'y suis pas arrivé.*

C. Les questions à traiter devant le jury

1. Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez en particulier l'accompagnement que vous pourriez leur proposer.

2. Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale.

3. Proposez deux exercices sur le thème *probabilités,* un au niveau du collège et un au niveau du lycée ; l'un des exercices devra permettre notamment de développer la compétence « chercher ».

2. Eléments de correction

Voici un exercice de réinvestissement de la notion de loi binomiale. Il doit amener une discussion suivant les valeurs de l'entier *n*.

1. Analyse des travaux d'élèves.

Bougnègue.

Bougnègue dégaine son tableur.

Réussites

La copie d'écran montre qu'il a correctement tabulé les deux suites définies par : $u(n,p)=\binom{n}{3}\times p^3\times(1-p)^{n-3}$ lorsque $p=\frac{1}{3}$ et lorsque $p=\frac{1}{2}$. Il a donc identifié la notion en jeu, à savoir la loi binomiale de paramètres *n* et $p=\frac{1}{3}$ puis $p=\frac{1}{2}$, et reconnu que l'on s'intéressait au cas où le nombre d'occurrences de l'issue souhaitée était égal à 3.

Il semble qu'il ait lu « A-t-on plus de chances d'obtenir trois fois exactement Pile avec la pièce A *qu'avec* la pièce B », ce qui gêne sa perception d'une discussion suivant la valeur de l'entier *n* (ce n'est pas pour autant une erreur).

Ses résultats pour $n\leq 9$ sont fiables.

Erreur

Cependant, Bougnègue extrapole le rangement des deux probabilités $u\left(n,\frac{1}{2}\right)$ et $u\left(n,\frac{1}{3}\right)$. Selon lui : « Puisque $u\left(n,\frac{1}{3}\right)>u\left(n,\frac{1}{2}\right)$ pour 8 et 9, cette inégalité va définitivement être vérifiée pour les valeurs suivantes de *n* ». Or, il s'agit là d'une conjecture. Son tableur ne peut permettre, en aucun cas, de démontrer un résultat général.

Il faudrait amener cet élève à expliciter les formules qu'il a utilisées et à trouver un moyen pour comparer mathématiquement les expressions des deux probabilités « pièce A » et « pièce B ».

On remarque autre chose : le mode d'affichage inattendu en écriture scientifique, ce qui n'est pas le mode le plus adapté ici.

Il faudrait en rappeler les conventions. Par exemple, dire qu'une écriture scientifique de la probabilité d'avoir trois Pile en 7 lancers de la pièce A est $2{,}6E-01$, cela signifie que celle probabilité p_1 est telle que : $2{,}55\times10^{-1}\leq p_1<2{,}65\times10^{-1}$, la mantisse 2,6 étant un nombre décimal compris entre 1 et 10.

De même, dire qu'une écriture scientifique de la probabilité d'avoir trois Pile en 7 lancers de la pièce B est $2{,}7E-01$, cela signifie que celle probabilité p_2 est telle que : $2{,}65\times10^{-1}\leq p_2<2{,}75\times10^{-1}$.(C'est ce qui nous permet d'affirmer, justification à l'appui, que pour cette valeur de *n* : $p_1<p_2$).

Elève 2.

Réussites
Nous avons un peu de mal à en relever.
Cet élève a intégré le fait que la probabilité d'une intersection d'évènements indépendants est le produit des probabilités de ces évènements. Il a intégré le fait que la somme des probabilités de deux issues d'une alternative est égale à 1.

Erreurs.
Cet élève n'a pas identifié la notion en jeu, la loi binomiale. Il n'a pas conscience que dans une série de lancers, l'occurrence de trois lancers peut intervenir à tout moment parmi ces n lancers. Il calcule donc la probabilité d'avoir trois Pile *suivis* de $(n-3)$ Face. Pour autant, cette erreur ne devrait pas gêner un éventuel prolongement, car elle est présente, de la même façon, dans le calcul des deux probabilités. Cet élève échoue aussi dans la comparaison des deux probabilités.

En accompagnement, il serait préférable de l'amener d'abord à une comparaison des deux expressions qu'il obtient (on peut lui proposer de calculer le quotient des deux probabilités).

Ensuite seulement de lui demander si les probabilités qu'il obtient sont bien exactes : « Pourquoi si tu explicites tes calculs, trouves-tu des probabilités nettement plus petites que celles trouvées par ton camarade ? ».

2. Correction de l'exercice.

Il s'agit de comparer $u\left(n,\frac{1}{3}\right)=\binom{n}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}$ avec $u\left(n,\frac{1}{2}\right)=\binom{n}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$. On fait remarquer que l'erreur de l'élève 2 n'aurait pas d'incidence sur la suite des évènements car le même facteur se trouve dans les deux expressions.

Pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de leur différence ou aussi, dans le cas de deux nombres strictement positifs, étudier la position de leur quotient par rapport à 1. Vu que les deux expressions se présentent sous forme de produit de facteurs, cette option semble prometteuse.

$$\frac{u\left(n,\frac{1}{3}\right)}{u\left(n,\frac{1}{2}\right)}=\frac{8}{27}\times\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}}=\frac{8}{27}\times\frac{27}{64}\times\left(\frac{4}{3}\right)^n=\frac{1}{8}\times\left(\frac{4}{3}\right)^n\ ;\ \text{Or : } \frac{u\left(n,\frac{1}{3}\right)}{u\left(n,\frac{1}{2}\right)}\geq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^n\geq 8$$

Dès lors, nous avons le choix entre deux méthodes : soit chercher à situer les termes de la suite strictement croissante de terme général $\left(\frac{4}{3}\right)^n$ par rapport à la valeur 8 (par une tabulation par exemple) soit avoir recours à la fonction logarithme

:

Dans cette seconde option :

$\left(\dfrac{4}{3}\right)^n \geq 8 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln 8}{\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)}$.

Une calculatrice indique que $7{,}2 < \dfrac{\ln 8}{\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)} < 7{,}3$

ce qui permet d'affirmer que la pièce A est plus favorable que la pièce B si $n \geq 8$, alors que pour $4 \leq n \leq 7$, c'est la pièce B qui est plus favorable que la pièce A.

Define $u(n,p)=\mathrm{nCr}(n,3)\cdot p^3\cdot(1-p)^{n-3}$ *Terminé*

$\mathrm{seq}\left(u\left(n,\frac{1}{2}\right),n,4,10\right)$

$\{0.25,0.3125,0.3125,0.2734,0.2188,0.1641,0.1172\}$

$\mathrm{seq}\left(u\left(n,\frac{1}{3}\right),n,4,10\right)$

$\{0.0988,0.1646,0.2195,0.2561,0.2731,0.2731,0.2601\}$

$\dfrac{\ln(8)}{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}$ 7.228