ESD 2019_02 : Arithmétique

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

Soit n un entier naturel.

Démontrer que, dans l'écriture en base dix, les entiers n et n^5 ont le même chiffre des unités.

B. Les productions de trois élèves de terminale scientifique spécialité mathématiques

Elève 1

Je regarde tous les cas possibles pour le chiffre des unités, de 1 à 9.
$1\times1\times1\times1\times1=1$; $2\times2\times2\times2\times2=32$; $3\times3\times3\times3\times3=243$ *et ainsi de suite. Je calcule les autres avec un tableur, ça marche à chaque fois, c'est le même chiffre.*

Elève 2

J'ai comparé les restes de n^5 *et de n dans la division euclidienne par* 10 *à l'aide d'un programme écrit en langage Python, j'obtiens le même reste. Donc le chiffre des unités de n et de* n^5 *est le même*

```
from math import*
for n in range(10):
    a=(n**5)%10
    b=n%10
    if a==b:
        print(n)
```

.**Elève 3**

J'ai calculé n^5-n *pour les premières valeurs de n, le dernier chiffre est zéro.*

Je vais le prouver par récurrence. Je suppose que n^5-n *est un multiple de* 10 *et alors je dois montrer que* $(n+1)^5-(n+1)$ *est aussi un multiple de* 10.

$(n+1)^5-(n+1)=n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n+1-n-1$

$=(n^5-n)+10(n^3+n^2)+5(n^4+n)$

$=5(n^4+n)$

car (n^5-n) *et* $10(n^3+n^2)$ *sont des multiples de* 10. *Ensuite je ne sais pas quoi faire pour* (n^4+n)

C. Les questions à traiter devant le jury

1. Analysez les productions de ces trois élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez en particulier l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

2. Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3. Proposez deux exercices sur le thème *arithmétique* un au niveau du collège et un au niveau du lycée. L'un des exercices devra notamment permettre de développer la compétence « communiquer ».

2. Eléments de correction

Plusieurs méthodes permettent la résolution de cet exercice, comme c'est souvent le cas dans le thème « Arithmétique ». Cet exercice peut être l'occasion de comparer l'efficacité de plusieurs outils, parmi eux celui des congruences.

1. Analyse des travaux d'élèves.

Bougnègue.

Bougnègue opte implicitement pour un raisonnement par disjonction de cas, suivant le chiffre des unités. Il néglige le cas où le chiffre des unités est 0, qui sans doute lui paraît évident, détermine « à la main » le chiffre des unités de n^5 pour $n = 1, 2, 3$ puis dégaine son tableur (ce qui est un excellent réflexe et correspond bien à l'un des usages que l'on peut conférer à un tableur : automatiser des calculs fastidieux). Nous ne disposons malheureusement pas de sa copie de tableur, ce qui ne nous permet pas d'en contrôler les résultats.

Il est difficile de mettre en évidence une « réussite » dans la production de Bougnègue, à part son présumé réflexe d'automatiser les calculs. Il reste en effet à justifier quels sont « tous les cas possibles » et en quoi le « chiffre des unités » intervient dans cette affaire, cette justification étant essentielle.

Tel est l'accompagnement qu'on peut lui proposer : il ne suffit pas de « regarder », il faudrait préciser quel est le rôle du « chiffre des unités » et établir un lien avec la division euclidienne par 10.

Escartefigue.

Nous remarquons l'analogie avec la démarche de Bougnègue : lui aussi opte pour un raisonnement par disjonction de cas. Nous remarquons en même temps une différence : Escartefigue parle explicitement de « restes dans la division euclidienne par 10 », ce qui est une réussite absente dans la production de Bougnègue. La production d'Escartefigue est d'emblée de qualité supérieure à celle de Bougnègue.

Le jury attend certainement du candidat qu'il commente l'écriture de l'algorithme en langage Python. Je n'ai pas cette compétence, ce langage m'est complètement étranger. Il apparaît assez clair que « for n in range (10) » crée la liste $\{0, 1, ..., 9\}$ et je subodore que « % » renvoie le reste d'une division euclidienne, mais je ne saurais l'affirmer et je botte en touche.
Quant aux candidats au CAPES, ils se doivent d'étudier suffisamment ce langage pour répondre correctement à cette question. La balle est dans leur camp.

Elève 3.

Cet élève représente une autre démarche de résolution, une démonstration par récurrence. Les deux phases d'une telle démonstration apparaissent clairement : l'initialisation (on aimerait savoir quels sont pour lui « les premiers entiers », on lui fera préciser) et l'hérédité, que cet élève définit très correctement.
Cet élève fait implicitement le lien entre la question posée et le fait que $n^5 - n$ est un multiple de 10 (réussite partielle, il faudrait faire expliciter ce qu'il veut dire).

Deux erreurs : d'une part cet élève confond égalité et congruence (sa suite d'égalités est incorrecte, alors qu'un emploi de congruences modulo 10 aurait été correct) et d'autre par il ne « sait pas quoi faire pour $\left(n^4 + n\right)$ ». L'accompagnement qu'on peut lui proposer est d'une part de lui faire identifier l'outil qui permettrait légitimement de négliger des termes tels que $10\left(n^3 + n^2\right)$, celui des congruences, et d'autre part de lui faire prendre conscience que la question qu'il se pose revient à savoir si $\left(n^4 + n\right)$ est, ou non, un nombre pair.

2. Correction de l'exercice.

Soit n un entier naturel. Il s'agit de souligner le rôle de l'équivalence suivante : L'entier c $(0 \leq c < 10)$ est le chiffre des unités de l'écriture de n dans la numération décimale si et seulement si c est le reste de la division euclidienne de n par 10. Les entiers n et n^5 ont le même chiffre des unités si et seulement si ils ont le même reste dans la division euclidienne par 10.

On peut en outre mettre en évidence avec profit l'apport de l'outil des congruences dans ce genre de situation : L'entier c est le chiffre de ses unités dans la numération décimale si et seulement si : $\begin{cases} n \equiv c \quad (10) \\ 0 \leq c < 10 \end{cases}$.

Dès lors, au moins deux démarches de résolution apparaissent :

- Ou bien un raisonnement par disjonction des cas (à l'image des productions des élèves 1 ou 2), suivant la valeur du reste de la division de n par 10 (dix cas à considérer).
- Ou bien un raisonnement par récurrence, en faisant aboutir la démarche de l'élève 3.

Une troisième méthode peut être mise en œuvre, suggérée par la production de l'élève 3 : Les entiers n et n^5 ont le même reste dans la division euclidienne par 10 si et seulement si $n^5 - n$ est divisible par 10, c'est-à-dire si et seulement si $n^5 - n$ est divisible à la fois par 2 et par 5.
Or, l'expression $n^5 - n$ est factorisable : $n^5 - n = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$. Dans cette factorisation, figure toujours trois entiers consécutifs : l'un au moins des trois est un nombre pair. Il reste à démontrer que, toujours, l'un au moins des quatre entiers figurant dans la factorisation est un multiple de 5.

Nous voyons au passage dans cette troisième méthode un exemple d'application (pour $p = 5$) du petit théorème de Fermat : « Soit p un nombre premier ; pour tout entier naturel n, l'entier $n^p - n$ est divisible par p ». Nous serions en mesure de démontrer que pour tout entier naturel n, l'entier $n^5 - n$ est divisible par 30.

3. Exercices complémentaires

Un seul credo peut éviter le bûcher de la Sainte Inquisition (dominicaine bien entendu) des compétences :

♬ Communique nique nique ♬ en tous chemins ♬ en tout lieu ♬