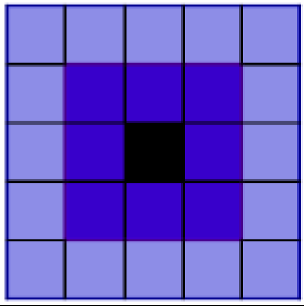
ESD 2019_01 : Suites

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

Un artisan doit carreler une pièce carrée accueillant en son centre une petite statue dont le socle est carré. Il utilise des carreaux de même dimension que le socle de la statue. Il commence d'abord en entourant celle-ci par une couronne de carreaux et poursuit avec des couronnes de plus en plus grandes comme indiqué sur la figure ci-contre, où le socle de la statue est représenté par le carré noir central.



Il a besoin de 157 couronnes autour du socle de la statue pour paver la salle. Il dispose en tout de 99221 carreaux, en a-t-il assez?

B. Les productions de trois élèves de terminale STMG

Elève 1

Pour passer d'une couronne à une autre, l'artisan doit rajouter 8 *carreaux à chaque fois.*
On a donc une suite arithmétique de premier terme 8 *et de raison* 8.
u_{157} *est le nombre de carreaux de la* 157*-ième couronne, on a* $u_{157} = 8 + 8\times 157 = 1264$.
La salle étant carrée, on enlève les 4 *carreaux formant les coins, on a donc en tout* 1260 *carreaux sur les quatre côtés donc* 315 *carreaux sur un côté. En ajoutant les deux coins, on obtient* 317.
Il faut donc $317^2 = 100489$ *carreaux . L'artisan n'a donc pas assez de carreaux.*

Élève 2

u_n *est le nombre de carreaux sur la n-ième couronne, on a* $u_1 = 8$. *Pour passer d'une couronne à l'autre, il suffit d'ajouter les quatre coins. On a donc une suite arithmétique de premier terme* 8 *et de raison* 4.
Le nombre de carreaux nécessaire pour carreler entièrement la salle est égal à

$S = u_1 + u_2 + u_{157} = 157\times\dfrac{8+4\times 156}{2} = 49612$. *L'artisan a donc largement assez de carreaux.*

Élève 3

J'ai calculé l'aire totale et j'ai soustrait l'aire du socle ; j'obtiens $157^2 - 1$.

C. Les questions à traiter devant le jury

1. Analysez les productions de ces trois élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez en particulier les conseils que vous pourriez leur apporter.

2. Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale STMG.

3. Proposez deux exercices sur le thème *suites* permettant notamment de développer les compétences « chercher » et calculer.

2. Eléments de correction

Passons sur la profonde hérésie consistant à carreler une pièce en commençant par son centre (imaginer les conséquences désastreuses d'une erreur de 1 millimètre sur l'alignement aux côtés du carreau central). On a probablement, dans le passé, guillotiné des carreleurs pour moins que ça.

Cet exercice contextualise la notion de somme des termes d'une suite arithmétique. Il présente l'intérêt non négligeable d'illustrer géométriquement un calcul à de la somme des n premiers entiers. Présenté dans le thème « *suites* », il s'agit d'un authentique problème de recherche dans lequel une certaine dose de « prise d'initiative » est indispensable.

1. Analyse des travaux d'élèves.

Elève 1.

Démarche intéressante, qui pourrait aboutir, mais résultat incorrect en raison de plusieurs erreurs de calcul.

Réussites.
Cet élève a une bonne compréhension du problème. Il parvient à modéliser correctement la succession des carreaux à l'aide d'une suite arithmétique.
Il a conscience que, en ce qui concerne un carré quadrillé, il y a une différence entre le périmètre du carré et le nombre de carreaux de bord : « *on enlève les quatre coins* » montre que cet élève sait qu'il y a une différence entre le périmètre et le nombre de carreaux de bord et que cette différence est égale à 4 car les carreaux de coin appartiennent à deux bords. Malheureusement, il fera une erreur de sens sur cet écart (il aurait dû les ajouter et non les enlever).

Apparemment, il ne connaît pas de formule donnant la somme des termes d'une suite arithmétique (c'est son droit, ce n'est pas au programme de STMG), mais il essaie de tourner cette difficulté.

Echecs.
Cet élève commet une première erreur de synchronisation entre la valeur du terme u_n et la valeur de l'indice. Il considère que $u_n = 8 + 8n$ au lieu de $u_n = 8 + 8(n-1)$ car il ne tient pas compte que le premier terme est affecté de l'indice 1. Il aurait dû trouver 1256 carreaux ce qui donnait un périmètre égal à 1260 pour la partie carrelée « en ajoutant (et non en enlevant) les quatre coins ». Sa deuxième erreur aurait pu neutraliser la première mais les « deux coins ajoutés » constituent une troisième erreur qui rend le résultat incorrect. De plus, il oublie le socle (mais cet oubli est anecdotique).

Elève 2.

Démarche correcte, mais résultat incorrect à cause d'une erreur rédhibitoire sur la valeur de la raison de la suite arithmétique.

Réussites.
Cet élève au contraire du premier propose un traitement mathématique presque cohérent mais n'a pas une bonne compréhension du problème.
Il identifie correctement la notion en jeu, la somme des termes d'une suite arithmétique.

Echecs.
Cet élève commet une première erreur rédhibitoire sur la raison de la suite arithmétique.
L'expression de la somme des termes d'une suite arithmétique est ensuite incorrecte (on attendait $S = u_1 + u_2 + u_{157} = 157 \times \dfrac{8 + (8 + 4 \times 156)}{2}$ c'est pourquoi son résultat n'est que « presque cohérent »).
Il faudrait attirer l'attention de cet élève sur le passage d'une couronne à l'autre : est-ce vrai qu'il « *suffit d'ajouter les quatre coins* » ? On peut l'inciter à vérifier si c'est vrai pour les premières couronnes.

Une fois cette erreur corrigée, cet élève devrait trouver $S=157\times\frac{8+(8\times156)}{2}$ soit 98596 carreaux et conclure qu'il y a assez de carreaux, ce qui est encore incorrect. On peut laisser les choses en l'état et revenir vers lui après la correction : en quoi sa formule était-elle différente de la formule correcte $S=157\times\frac{16+(8\times156)}{2}$, que faut-il modifier et pourquoi ?

Elève 3.
Cet élève n'a pas compris la question posée. Il a donc essayé de produire un calcul numérique qui lui semblait plausible, en utilisant les données de l'énoncé (effet de contrat didactique : on me pose une question, je produis une réponse avec les moyens du bord). En l'occurrence, le calcul de l'aire d'un carré lui paraissait le plus plausible. Il n'y a dans sa production aucune « réussite ».

Il paraît difficile de le conseiller efficacement, tant cet élève est loin de la notion de suite arithmétique. C'est peut être précisément sur cette notion qu'il faudrait le conseiller (?) : lui faire détailler le passage d'une couronne à la suivante puis calculer le nombre de carreaux de chaque couronne. Après, on verra.

2. Correction de l'exercice.

On convient de choisir pour unité de longueur le côté d'un carreau.
Peut-être s'intéresser au carré constitué par la juxtaposition de n couronnes. La première couronne permet de constituer un carré de côté 3, et chaque couronne supplémentaire augmente le côté de la partie carrelée de deux unités.

Le côté c_n de la partie carrelée après la pose de n couronnes est une suite géométrique de premier terme $c_1=3$ et de raison 2, et par conséquent l'expression explicite du côté de la partie carrelée après la pose de n couronnes est : $c_n=3+2\times(n-1)=2n+1$.

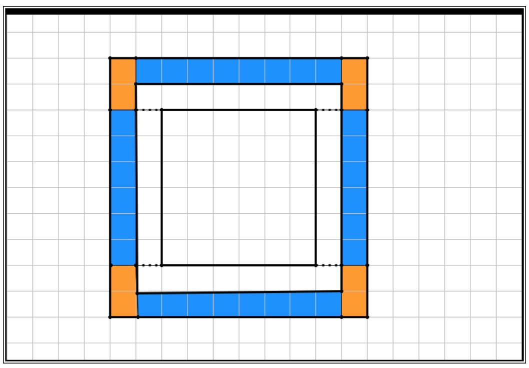
En particulier : $c_{157}=2\times157+1=315$.

Le nombre de carreaux nécessaires pour carreler la totalité de la pièce est : $315^2-1=99\,224$ carreaux. Il manquera 3 carreaux pour carreler la totalité de la pièce, c'est ballot[1].

Il reste à comparer cette méthode avec celles suggérées par les démarches des élèves 1 et 2.

- Pour passer d'une couronne à une autre, l'artisan doit-il rajouter 4 ou 8 carreaux à chaque fois ?
- La formule explicite donnant le nombre u_n de carreaux en fonction de u_1, n et la raison de la suite arithmétique, quelle est-elle au juste ? Comment la calculer ?

Un examen minutieux de deux couronnes successives, et un découpage de la couronne périphérique montre que c'est l'élève 1 qui a raison : la couronne périphérique compte 8 carreaux de plus que la couronne qu'elle entoure, la conception de l'élève 2 est mise en défaut.



Ceci peut s'expliquer autrement : si on considère un carré de format $n\times n$ carreaux, les carreaux de bordure sont au nombre de $4n-4$ (il y a n carreaux sur chaque bord, mais les 4 carreaux de coin sont comptés deux fois). Ici, la n-ième couronne est le bord d'un carré de format $(2n+1)\times(2n+1)$.

[1] Il est vrai qu'on a oublié les joints. Certains disent qu'avec un joint tout est plus facile.

On doit obtenir que le nombre de carreaux de la k-ième couronne est : $u_k = 8k$ puis que le nombre total S_n de carreaux nécessaires pour carreler un carré de n couronnes autour du socle est :
$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = 8(1+2+...+n) = 8 \times \dfrac{n(n+1)}{2} = 4n(n+1)$, ceci dans l'hypothèse où la formule explicite donnant la somme des n premiers entiers est connue.

En particulier : $S_{157} = 4 \times 157 \times 158 = 99224$, résultat qui concorde avec celui de la méthode précédente.

Il appartient au candidat de proposer une correction d'exercice conforme au programme de terminale STMG :

- *Écrire le terme général d'une suite arithmétique ou géométrique définie par son premier terme et sa raison.*
- *Calculer avec la calculatrice ou le tableur la somme de n termes consécutifs (ou des n premiers termes) d'une suite arithmétique ou géométrique.*
- *Pour certaines résolutions, le tableur est indispensable.*

NB. Sachant que en STMG « *L'expression de la somme de n termes consécutifs n'est pas un attendu du programme* », et dans l'hypothèse où la formule explicite donnant la somme des n premiers entiers n'est pas connue, cet exercice en donnerait une explication géométrique. En dénombrant de deux façons différentes le nombre de carreaux nécessaires pour carreler un carré de n couronnes autour du socle, on obtiendrait la relation : $8(1+2+...+n) = (2n+1)^2 - 1$, puis la formule usuelle.