ESD2018_3c03. Conjecture et démonstration

1. Le sujet

A. Exercice

Soit *LEO* un triangle rectangle en *L* tel que $OE = 4\ cm$ et $OL = 2\ cm$. *OLGA* est un losange tel que *E, O,* et *A* sont alignés dans cet ordre.

1. Réaliser une figure.

2. Conjecturer et démontrer une propriété sur les longueurs *LE* et *LA*.

D'après les fiches de tonton Lulu, vol. 1, diffusion Tangente

B. Les réponses de deux élèves de Cycle 4 à la question 2.

Elève 1.

Je conjecture que $LE = LA$.

J'appelle I le milieu du segment [EO].

Je vois que le triangle OIL est équilatéral et que les triangles EIL et OLA sont égaux. Par conséquent, $LE = LA$

Elève 2.

Sur mon dessin je pense que LA est plus grand que LE.

Dans le triangle LEO rectangle en L je peux calculer la longueur EL avec le théorème de Pythagore : $EL^2 + LO^2 = EO^2$ *donc* $EL = \sqrt{12}$

Ensuite, j'ai appelé C le centre du losange et je voulais montrer que la longueur CL est $\frac{\sqrt{12}}{2}$ *mais je n'y suis pas arrivé car il manque une longueur dans le triangle rectangle OCL.*

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez ces productions d'élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez l'aide que vous pouvez leur apporter.

2. Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de collège de cycle 4.

3. Proposez deux exercices sur le thème *conjecture et démonstration,* l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée L'un au moins des exercices devra permettre de développer la compétence « raisonner ».

2. Eléments de correction

Le thème « *conjecture et démonstration* » concerne souvent des exercices dans lesquels les élèves sont eux-mêmes invités à formuler une question puis à y répondre. Cet exercice illustre assez bien cette particularité, l'énoncé orientant tout de même très fortement la question à se poser.

Cet exercice est destiné à faire progresser des élèves dont l'élève 1 est représentatif : faire la différence entre « ce que l'on sait » (les hypothèses), « ce que l'on voit » (les conjectures), « ce que l'on démontre » (les propriétés qui font l'objet d'un raisonnement). Il peut être posé en liaison avec différents thèmes du programme : les caractérisations du triangle rectangle, la trigonométrie, les cas d'égalité des triangles.

On peut regretter la mode ridicule et démagogique qui consiste à donner des prénoms aux objets mathématiques. Cela n'amuse personne. En ne respectant pas une certaine harmonisation des notations et en détruisant tout effet de permutation circulaire, cette mode insupportable peut induire stupidement les élèves en erreur et entraver une vision pertinente d'une figure géométrique. Nommer le triangle *ABC* et le losange *ABDE* par exemple aurait été moins puéril.

1. Analyse de travaux d'élèves.
Elève 1.
Cet élève a visiblement réussi la construction de la figure. Ses conjectures sont correctes, en particulier il émet une conjecture intéressante sur les triangles *EIL* et *OLA* qui n'est pas explicitement demandée (il sait repérer des propriétés d'une configuration) ; cette conjecture peut être exploitée pour amorcer une correction de l'exercice.
En revanche, il ne fait pas la différence entre ce que l'on conjecture et ce qui doit faire l'objet d'une preuve, sa réponse est invalide.
L'aide que l'on peut lui apporter mettra l'accent sur cette distinction : « Est-ce que le triangle *IOL* est à peu près équilatéral ou bien exactement équilatéral ? Peux-tu donner une raison qui confirmerait (ou non) ce que tu vois ? Idem pour ce que tu vois à propos des triangles *EIL* et *OLA* ».

Elève 2.
Il est regrettable que l'on ne dispose pas de son « dessin ». Cet élève émet une conjecture incorrecte mais, contrairement à l'élève 1, il s'engage dans une tentative de démonstration (qui, si elle aboutit, devrait infirmer sa conjecture). Cet élève semble distinguer un dessin à main levée (?) d'une figure abstraite puisqu'il ne fait pas vraiment confiance à « ce qu'il pense », mais il devrait acquérir un peu de distanciation par rapport à la lecture d'une telle figure ; il semble avoir des difficultés à en extraire une figure-clef.
On note dans cette production trois réussites importantes :

- Cet élève justifie ses dires en s'appuyant sur les théorèmes du cours.
- Il est capable d'anticiper une démarche : il élabore en effet un protocole de démonstration (ce qu'il devrait faire pour aboutir).
- Il a une attitude critique sur sa démarche (il est conscient de la raison de son échec).

Un échec : son incapacité à changer de stratégie. Sa démonstration n'aboutit pas car il voudrait appliquer une nouvelle fois le théorème de Pythagore, mais dans un triangle où l'on ne connaît *a priori* que la longueur de l'hypoténuse, c'est une impasse. Sa vision de la figureest trop partielle (il n'y voit que des triangles rectangles) .
Il faudrait orienter cet élève vers une lecture plus globale de la figure et vers l'utilisation d'un autre outil (la trigonométrie) que celui des configurations : « tu ne connais qu'une seule longueur dans le triangle *OCL*, mais est-ce que tu pourrais préciser une mesure de certains de ses angles ? ».

2. Correction de l'exercice

La correction de cet exercice peut s'appuyer avec profit sur la production de l'élève 1 :
Il semblerait selon lui que les triangles EIL et OLA soient « égaux ». Qu'est-ce que cela signifie (on rappelle la notion de « triangles égaux ») ? En quoi cela réglerait notre question ?
Est-ce que cela suffit de dire « qu'on le voit » ? On insiste sur la nécessité de justifier par un raisonnement la propriété « que l'on voit ».

On attirera d'abord l'attention sur la particularité du triangle LOE : « que peut-on dire d'un triangle rectangle dont la longueur d'un côté est la moitié de celle de l'hypoténuse ? ».

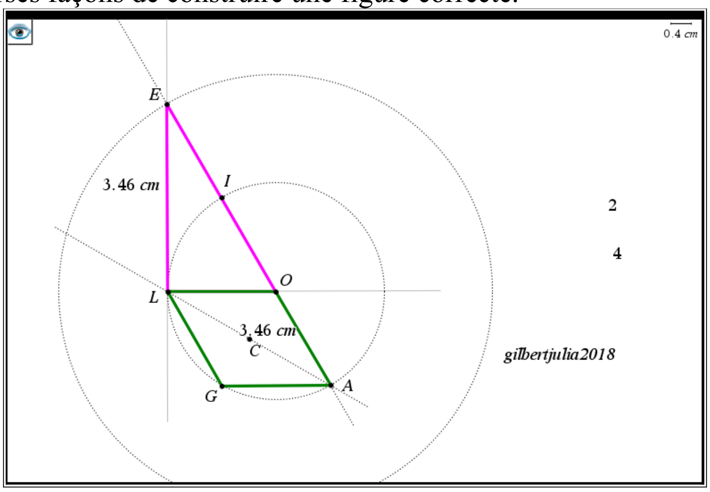
- Le centre du cercle circonscrit au triangle rectangle LOE en L est le milieu I de l'hypoténuse $[OE]$: $IO = IL = IE = \frac{1}{2}OE$.
- La longueur du côté $[OL]$ est égale à la moitié de celle de l'hypoténuse $[OE]$: $OL = \frac{1}{2}OE$.
- Il en résulte que $IO = IL = OL = \frac{1}{2}OE$, le triangle IOL est équilatéral (comme l'a conjecturé l'élève 1, c'est le point clef de l'exercice)
- En conséquence, tous les angles de ce triangle ont pour mesure 60°.

On s'intéresse ensuite aux triangles EIL et OLA en faisant apparaître qu'il s'agit de deux triangles isocèles dont les côtés sont égaux et dont l'angle au sommet mesure 120°. Ces triangles sont égaux (i.e. superposables) car ils ont des côtés deux à deux égaux qui encadrent des angles de même mesure. Les longueurs de leurs bases respectives, LE et LA, sont donc égales.

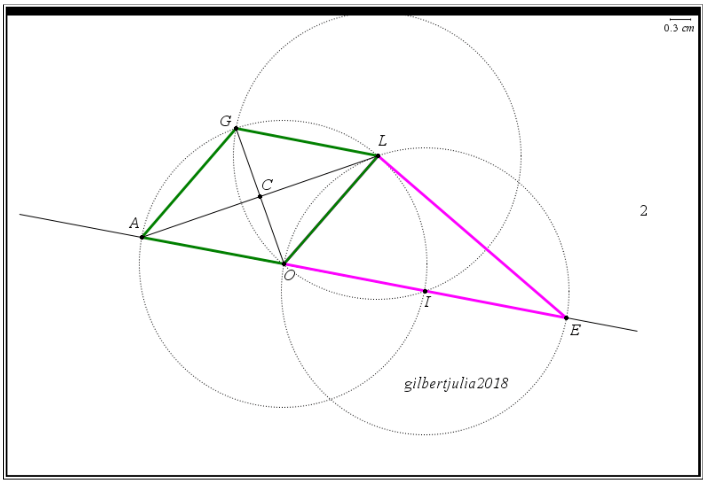
Il est possible aussi de corriger l'exercice en s'appuyant sur la production de l'élève 2. On fait remarquer que la longueur de LE peut être calculée de deux façons, à l'aide du théorème de Pythagore certes, mais aussi à l'aide d'une relation trigonométrique : gilbertjulia2018 $LE = OE \sin \widehat{EOL}$. Une autre relation trigonométrique permettra de calculer CL et de faire aboutir la démarche de l'élève 2.

NB. La construction de la figure impacte la vision que l'on peut en avoir. Il convient pour corriger la question **1** de l'exercice de choisir l'une des diverses façons de construire une figure correcte.

L'éxécrable notation LEO incite à tracer un cercle de gj centre O …
Ci-contre, on a commencé par tracer un cercle de centre O et de rayon 2 et de par placer un point L sur ce cercle. Le point E est l'un des deux points d'intersection du cercle de centre O et de rayon 4 avec la perpendiculaire en L à (LA).



Ci-contre, on a placé deux points O et E diamétralement opposés sur un cercle de rayon 2. Le tracé du cercle de centre O et de rayon 2 permet d'obtenir à la fois L, un des points d'intersection avec le cercle de diamètre $[OE]$, et A. Le point G s'obtient (par exemple) comme intersection autre que I du cercle de centre L passant par O avec le cercle de centre O et passant par I.



Cette construction est incontestablement plus performante que la précédente, elle met mieux en évidence la présence de plusieurs triangles équilatéraux dans la configuration.

Au candidat de résumer sa propre correction, suivant l'orientation qu'il souhaite lui donner, et d'en rédiger une trace écrite, certes destinée à être notée par des élèves, mais qui pourra surtout être exposée devant un jury.

3. Exercices complémentaires

Sur le thème *conjecture et démonstration,* compétence « raisonner ».
Liste non exhaustive de sujets de sessions précédentes s'y rapportant plus ou moins :

ESD2014_01

ESD2015_04

ESD2012_14