ESD2018_17. Suites

Sujet à rapprocher de 2018_06

1. Le sujet

A. Exercice

On considère une suite numérique (u_n) définie par $u_0 = -2$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{1}{3}{u_n}^2$

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $0 \le u_n \le 2$

2. La suite converge-t-elle ? Justifier.

B. Les réponses de deux élèves de terminale scientifique

Elève 1

1. Je démontre le résultat par récurrence. Je pose $P(n) : 0 \le u_n \le 2$.

Je suppose que pour tout n, $0 \le u_n \le 2$. On a donc : $0 \le {u_n}^2 \le 4$ donc $0 \le \frac{1}{3}{u_n}^2 \le \frac{4}{3}$. Ainsi $0 \le u_{n+1} \le 2$ et le résultat est démontré par récurrence.

2. J'en déduis que la limite l est entre 0 et 2 puis que $l = \frac{1}{3}l^2$ d'après l'énoncé.

Je résous l'équation $l = \frac{1}{3}l^2 \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{3}l \Leftrightarrow l = 3$ ce qui n'est pas possible donc la suite n'a pas de limite.

Élève 2

1. J'utilise cette feuille de tableur.
D'après le tableur, la suite est décroissante à partir du rang 1 et comme $u_1 = \frac{4}{3}$, on a bien $u_n \le 2$ puis $u_{n+1} = \frac{1}{3}{u_n}^2$ qui est positif donc $0 \le u_n$.

On peut aussi remarquer qu'en utilisant la fonction $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ qui est décroissante puisque $u_0 = -2$ et que la fonction carrée est décroissante sur les négatifs. On en déduit que la suite est décroissante.

2. La suite est décroissante et positive donc sa limite est 0 (la suite vaut même 0 à partir du rang 11)

	A	B
1	*n*	$u(n)$
2	1	-2
3	2	1,3333333333
4	3	0,5925925923
…	…	…
12	10	1,4443*E*-180
13	11	0

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez la production de chacun de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez les aides que vous pourriez leur apporter.

2. Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3. Proposez deux exercices sur le thème *suites*. L'un devra notamment permettre de développer la compétence « communiquer ».

2. Eléments de correction

Voici un exercice traitant, en dehors de toute contextualisation, d'une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
La notion de suite est ici un objet d'apprentissage et non un outil. La suite choisie est sans grande originalité, la situation est construite uniquement pour tester des méthodes d'étude d'une suite récurrente, en l'occurrence des méthodes permettant d'étudier sa convergence.

Un avantage de ce choix cependant, il sera possible de conjecturer puis démontrer une formule explicite pour le terme u_n, ce qui permettra éventuellement une alternative aux méthodes usuelles d'étude d'une telle suite. Cette formule explicite pourra éclairer quelque peu le pourquoi de la rapidité de convergence de la suite en question ici.

Il semble que le choix inattendu d'un terme initial négatif soit destiné à travailler sur la notion d'initialisation dans une démonstration par récurrence (la suite va être décroissante à partir du rang 1 et la relation $0 \le u_n \le 2$ est vérifiée à partir du rang 1, le rang zéro compte pour du beurre). Un tel choix ne s'impose pas.
L'intervalle $[0\ ;\ 2]$ est inclus dans $[0\ ;\ 3]$, intervalle stable par la fonction *f* en jeu ici. L'intervalle $[0\ ;\ 2]$ a un intervalle image par *f* inclus dans lui-même.

On note que les travaux d'élèves présentent un concentré d'erreurs classiques sur la notion de suite. Il est donc intéressant de traiter ce sujet avec soin.

1. Analyse de travaux d'élèves.

Elève 1
Cet élève échoue dans la résolution des deux questions. Il semble être le même que celui du sujet 2018_06 (il est intéressant de faire le parallèle entre les deux sujets).

Dans la question 1, sa démonstration par récurrence donne lieu à deux erreurs :
- L'idée qu'il se fait de l'hérédité n'est pas correcte car il suppose la conjecture « vraie *pour tout* entier *n* fixé ». Faut-il supposer « vraie *pour tout* entier *n* fixé » ou « vraie *pour un* entier *n* fixé ». La question sera à nouveau posée à cet élève, et la distinction sera à nouveau clairement mise en évidence…
- Cet élève n'initialise pas la propriété à démontrer, ce qui s'explique par la conception incorrecte précédente (en supposant la propriété vraie *pour tout n*, à quoi bon initialiser ?)

Une « réussite » relative dans cette question : l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Dans la question 2, il est avéré que cet élève sait qu'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$, si elle converge, ne peut converger que vers un point fixe de *f* (réussite).
Cependant, il semble que cet élève a une fausse conception du lien entre limite et inégalités. Il semble utiliser le théorème-élève : « si pour tout entier *n* $a \le u_n \le b$ alors $a < \lim\limits_{n\to+\infty} u_n < b$ » en lieu et place de « si pour tout entier *n* $a < u_n < b$ alors $a \le \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \le b$ » inversant ainsi les rôles des inégalités (pour lui, une inégalité large sur tous les termes induit une inégalité stricte sur la limite). C'est apparemment la raison pour laquelle il élimine l'éventualité $l = 0$ de son raisonnement.

Bougnègue
NB. Une bizarrerie dans le tableur de Bougnègue : d'où sort le décalage d'une unité qui se transforme inexplicablement en deux unités entre le numéro de la ligne et l'entier *n* ? Peut-être simplement une preuve que ces documents sont des contrefaçons (?).

Aujourd'hui Bougnègue nous réserve un feu d'artifice d'erreurs classiques :
- « Ce que je vois pour les premières lignes du tableur est toujours vrai ». Selon lui, l'examen d'assez nombreux exemples suffit pour établir un résultat universel.

- « Soit une suite récurrente $u_{n+1}=f(u_n)$. Si f est une fonction décroissante, alors la suite (u_n) est décroissante ». Selon lui, fonction f et suite récurrente associée varient dans le même sens.
- « Une suite décroissante et positive converge vers zéro » ou plus généralement « une suite décroissante et minorée par un réel m converge vers m ». Bougnègue sait qu'une suite décroissante et minorée converge, mais selon lui la limite est toujours le minorant de service.
- « Si mon tableur affiche 0, c'est que $u_n=0$ exactement ». Selon lui, quand le tableur n'affiche plus de décimales, le nombre affiché est nécessairement la valeur exacte. Bougnègue n'a pas conscience d'un éventuel dépassement de capacité de calcul.

Aucune réussite dans sa production. L'embryon d'une récurrence dans la question 1 peut difficilement être tenu pour une « réussite » tant il est incertain.

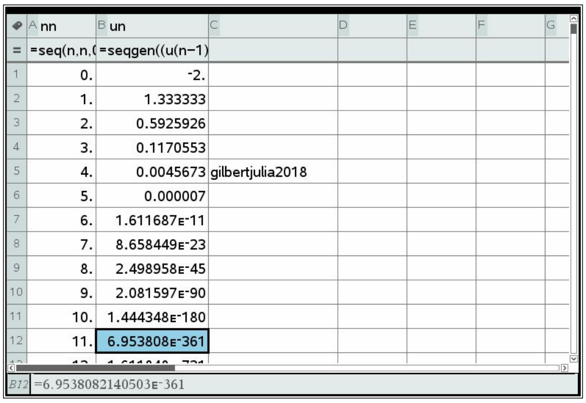
2. Une correction de l'exercice.

Question 1.

Il est possible d'utiliser le tableur de Bougnègue pour émettre quelques conjectures et faire quelques constats.

La double inégalité $0 \leq u_n \leq 2$ est vérifiée pour les rangs 1, 2 et 3 au moins mais elle n'est pas vérifiée pour le rang zéro.

TI*n*Spire est plus performant que le tableur de Bougnègue puisqu'il n'affiche pas 0 au rang 11.

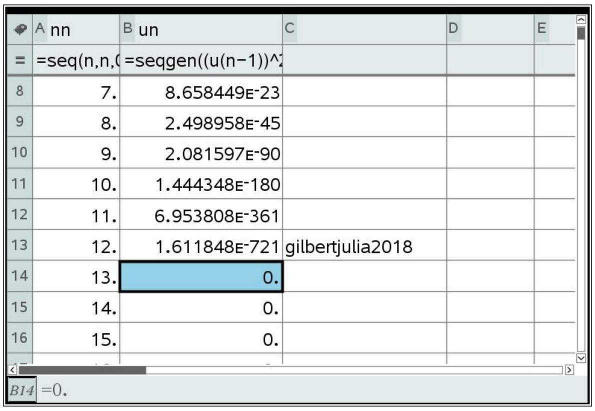


	A nn	B un	C
=	=seq(n,n,(	=seqgen((u(n−1)	
1	0.	-2.	
2	1.	1.333333	
3	2.	0.5925926	
4	3.	0.1170553	
5	4.	0.0045673	gilbertjulia2018
6	5.	0.000007	
7	6.	1.611687E-11	
8	7.	8.658449E-23	
9	8.	2.498958E-45	
10	9.	2.081597E-90	
11	10.	1.444348E-180	
12	11.	6.953808E-361	

B12 =6.9538082140503E-361

Mais ce n'est qu'un sursis. Le dépassement de capacité de calcul ne tarde pas à intervenir.

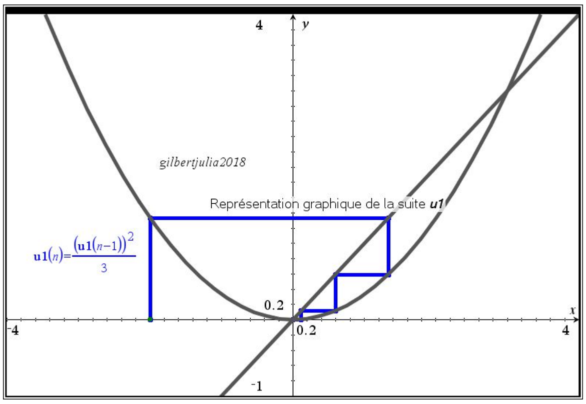
On va pouvoir s'interroger. Est-ce que cet affichage est exact, ou bien est-ce que cette suite converge exceptionnellement vite, au point que le logiciel n'est plus en mesure de faire la distinction entre la valeur de u_n et 0 ?



	A nn	B un	C
=	=seq(n,n,(	=seqgen((u(n−1))^2	
8	7.	8.658449E-23	
9	8.	2.498958E-45	
10	9.	2.081597E-90	
11	10.	1.444348E-180	
12	11.	6.953808E-361	
13	12.	1.611848E-721	gilbertjulia2018
14	13.	0.	
15	14.	0.	
16	15.	0.	

B14 =0.

Une représentation graphique de la suite en mode « toile » illustre la situation.



La démonstration de la propriété « pour tout entier strictement positif n, $0 \leq u_n \leq 2$ » peut se faire en suivant la démarche, une fois corrigée, de l'élève 1.

Question 2.

La question 1 a montré que la suite est bornée, elle est à la fois majorée et minorée. Elle semble converger vers zéro, mais comment le justifier ?

Variante 1 (la plus logique dans ce contexte)

On s'intéresse à son sens de variation. Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n \underset{gilbertjulia}{=} f(u_n) - u_n = \frac{1}{3}u_n(u_n - 3)$. S'il est vrai que, initialement, $u_1 - u_0 = \frac{10}{3} > 0$, en revanche pour tout entier n supérieur ou égal à 1, l'inégalité $0 < u_n < 2$ implique $u_n - 3 < 0$ puis $u_{n+1} - u_n < 0$. La suite est strictement décroissante à partir de son terme de rang 1 (nul besoin de récurrence).

En tant que suite décroissante et minorée (c'est un minorant qui nous intéresse), elle est convergente. Elle ne peut converger que vers un point fixe de f, et 0 est l'unique point fixe situé dans $[0 ; 2]$, c'est pourquoi elle converge vers zéro.

Variante 2

Pour tout entier n strictement positif, $0 \le u_n \le 2$. En écrivant ainsi la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n{}^2 = \left(\frac{1}{3}u_n\right) \times u_n$ et en y effectuant un encadrement partiel : $0 \le u_{n+1} \le \left(\frac{2}{3}u_n\right)$ pour tout entier n strictement positif. On peut dès lors comparer terme à terme, pour tout entier n strictement positif, la suite (u_n) avec la suite géométrique (v_n)de raison $\frac{2}{3}$, raison plus petite que 1, et de premier terme $v_1 = u_1 = \frac{4}{3}$.

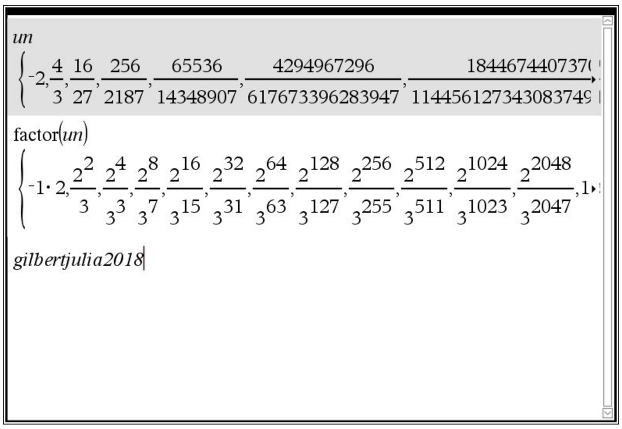
Puis appliquer le théorème des gendarmes. C'est peut être pour réserver cette variante (?) que l'auteur du sujet a demandé que l'on démontre $0 \le u_n \le 2$ plutôt que $0 \le u_n \le 3$, qui sait.

En tout état de cause, c'est plutôt la variante 1 qui tient la corde. Surtout que la suite à laquelle on a affaire converge à une vitesse beaucoup plus rapide que celle d'une suite géométrique.

Une alternative

Une factorisation des premiers termes de la suite (u_n) amène éventuellement à une conjecture : peut-être que, pour tout entier $n \ge 1$: $u_n = \frac{2^{2^n}}{3^{2^n - 1}}$.

Il reste à la démontrer par récurrence.



3. Commentaires

1. La fonction f définie sur **R** par : $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ présente deux points fixes.

L'un est un point fixe répulsif, c'est le point fixe 3. Sauf si $u_0=-3$ ou si $u_0=3$, auquel cas on obtient une suite constante au moins à partir du rang 1, aucune autre suite (u_n) ne peut converger vers ce point fixe.

L'autre est un point fixe hyper-attractif, c'est le point fixe 0. C'est ce qui explique dans ce contexte la convergence rapide de u_n vers sa limite.

Cette suite converge à la vitesse de $\left(\frac{2}{3}\right)^{2^n}$, et non à la vitesse d'une suite géométrique ; pour $n=12$, on obtient un terme qui est déjà plus petit que $\left(\frac{2}{3}\right)^{4000}$. Ce qui peut expliquer pourquoi le tableur ne fait pas longtemps la différence entre les deux réels pourtant distincts u_n et 0.

2. Un prolongement éventuel

Proposer d'étudier le comportement de la suite (u_n) suivant le choix de son terme initial u_0. La position de ce premier terme par rapport aux réels -3 et +3 est déterminante. On peut d'ailleurs se borner à étudier ce comportement pour un terme initial positif, puisque dès le terme de rang 1, tous les termes d'une telle suite sont positifs.

On commence dans cette perspective par établir les propriétés suivantes de la fonction *f* :

- Les intervalles $[0\ ;\ 3]$ et $[3\ ;\ +\infty[$ sont tous deux des intervalles stables par *f*.
- La fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$
- La fonction $x \mapsto f(x) - x$ est positive sur $[3\ ;\ +\infty[$ et négative sur $[0\ ;\ 3]$; elle n'est nulle que si $x = 0$ ou $x = 3$, seuls points fixes de *f*.

Puis on étudie les conséquences sur le comportement de la suite (u_n) :

Localisation des termes de cette suite

En raison de la stabilité des deux intervalles, par deux récurrences évidentes, si $0 < u_0 < 3$ alors pour tout entier naturel *n*, $0 < u_n < 3$ et si $u_0 > 3$ alors pour tout entier naturel *n*, $u_n > 3$. Deux cas particuliers, $u_0 = 0$; $u_0 = 3$ où la suite est stationnaire.

Sens de variation

On montre l'implication : $f\ \textit{croissante} \Rightarrow (u_n)\ \textit{monotone}$. Mais on montre que (u_n) est strictement croissante si $u_0 > 3$ et strictement décroissante si $0 < u_0 < 3$. Le choix du terme initial est déterminant sur le sens de variation de la suite.

Convergence

Le choix du terme initial est non moins déterminant ; on montre que (u_n) converge si $0 < u_0 < 3$, et que la convergence a lieu nécessairement vers zéro, mais que si $u_0 > 3$, la convergence est impossible, la suite n'est pas majorée, elle diverge vers $+\infty$.

3. Quant à la compétence « communiquer », se reporter à ESD2018_06