ESD2018_16. Arithmétique

1. Le sujet

A. Exercice

Une troupe d'hommes et de femmes a dépensé dans une auberge 1000 sous. Les hommes ont payé 19 sous chacun et les femmes 13. Combien y avait-il d'hommes et de femmes ?
Extrait des Eléments d'algèbre d'Euler.

B. Les réponses de deux élèves
Elève 1.
Soit x le nombre d'hommes et y le nombre de femmes, on aura l'équation $19x+13y=1000$.

Cela donne $y=\dfrac{1000-19x}{13}=76-x+\dfrac{12-6x}{13}$. *Par conséquent,* $12-6x$ *est divisible par 13, donc* $x-2$ *l'est. D'où* $x=2$ *car* $2-x$ *est un entier naturel donc positif et par conséquent* $y=74$. *Il y avait 2 hommes et 74 femmes. J'ai vérifié, ça marche.*

Elève 2.

J'ai écrit l'algorithme ci-dessous et je l'ai testé.

J'obtiens comme affichage : $(28\ ;\ 36)$ *et* $(41\ ;\ 17)$.
J'ai vérifié ces résultats et c'est bon mais je ne pense pas que ce soit une démonstration.

```
pour x allant de 1 à 52 faire
  pour y allant de 1 à 52 faire
    si 19 * x + 13 * y = 1000 alors
      Afficher (x, y)
    fin
  fin
fin
```

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez la production de chacun de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez l'aide que vous pourriez leur apporter.

2. Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3. Proposez deux exercices sur le thème *arithmétique*, un au niveau du collège et un au niveau du lycée. L'un des exercices devra permettre de développer la compétence « modéliser ».

2. Eléments de correction

Cet exercice amène à la résolution d'une équation diophantienne, du type $a\,x+b\,y=c$ dans un cas où aucune solution particulière n'est apparente.

1. Analyse de travaux d'élèves.

Elève 1.
Cet élève traduit correctement le texte de l'énoncé en l'équation diophantienne attendue, que l'on notera désormais (E) (réussite).

Il démontre l'implication, qui est correcte : $(x\ ;\ y)$ *solution de* $(E) \Rightarrow x-2$ *divisible par* 13 (réussite, bien qu'il aurait dû justifier quel théorème, en l'occurrence le théorème de Gauss, lui permettait d'affirmer que si $12-6x$ est divisible par 13, alors $x-2$ l'est aussi).

Son erreur est d'ajouter une condition auxiliaire ($2-x$ entier naturel) qui n'est pas justifiée. De la sorte, son implication $(x\ ;\ y)$ *solution de* $(E) \Rightarrow x=2$ est incorrecte. Peut-être pense-t-il, à juste titre, rechercher des solutions dans **N×N**, et qu'il a étendu cette propriété à l'entier $2-x$ qui n'a rien à voir à l'affaire.

Il obtient ainsi une solution particulière, mais n'a pas résolu l'exercice.
Il faudrait lui demander pour quelle raison, selon lui, $2-x$ serait un entier naturel.

Escartefigue.
Escartefigue trouve deux couples solutions qui attestent la pertinence de son algorithme (réussites) et garde une attitude critique par rapport à son travail (« réussite »). La réponse à la question qu'il se pose est donnée par l'élève 1, qui trouve une solution inattendue. Escartefigue est bien conscient qu'il a trouvé des solutions mais qu'il ne fournit pas une démonstration. Voir corrigé, première méthode, qui explique son erreur.

2. Correction de l'exercice.

Première méthode.
On reprend le travail de Escartefigue. Pourquoi n'est-ce pas une démonstration ?
On regarde de plus près le sous-ensemble de **N*×N*** exploré par son algorithme. Il s'agit de l'ensemble des couples entiers de : $[1\ ;\ 52]\times[1\ ;\ 52]$.

La condition $1 \le x \le 52$ est liée au fait d'une part que $x=0$ n'est pas dans un couple solution puisque 1000 n'est pas divisible par 13 et d'autre part que $52 < \dfrac{1000}{19} < 53$ car $1000 = 52\times 19+12$. Si x est dans un couple solution, alors nécessairement $x < 53$. C'est certainement le raisonnement (correct) de cet élève.

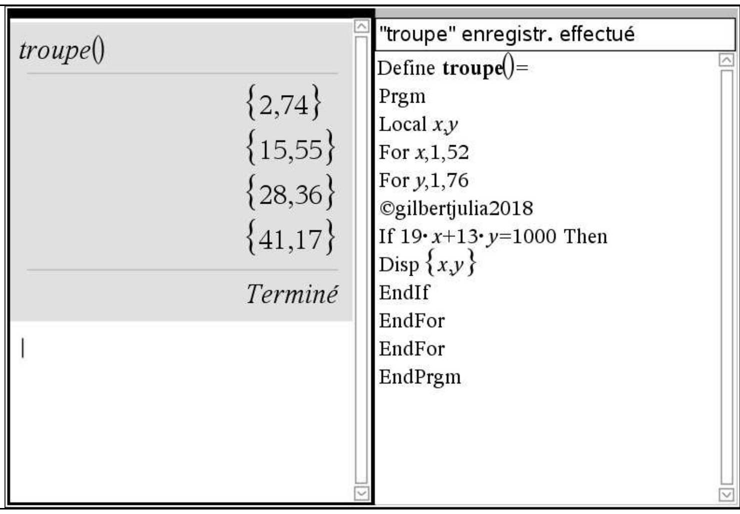
Mais qu'en est-il de la condition $1 \le y \le 52$? On peut dire que, si y est dans un couple solution, alors $1 \le y \le \dfrac{1000}{13}$. Vu que $76 < \dfrac{1000}{13} < 77$ car $1000 = 76\times 13+12$, la condition est incorrecte et doit être remplacée par $1 \le y \le 76$

L'implication $(x\ ;\ y)$ *solution de* $(E) \Rightarrow$ $(x\ ;\ y) \in [1\ ;\ 52]\times[1\ ;\ 76]$ est maintenant correcte.

C'est un préalable essentiel pour envisager une démonstration exhaustive : trouver un ensemble fini dans lequel toutes les solutions éventuelles se trouvent inexorablement. Escartefigue n'avait pas respecté cette condition, c'est pourquoi deux des solutions lui avaient échappé.

En corrigeant convenablement le sous-ensemble de **N*×N*** exploré par l'algorithme, on va pouvoir tester, réciproquement, si chacun des couples $(x\ ;\ y) \in [1\ ;\ 52] \times [1\ ;\ 76]$ est, ou n'est pas, une solution. C'est une authentique démonstration, basée sur un test *exhaustif* sur *tous* les couples potentiellement solutions.

Ci-contre, on obtient l'affichage de quatre couples solutions. On est sûr qu'il n'y en a aucun autre. Cette démarche exhaustive est valide.



Deuxième méthode
Résolution classique de ce type d'équation :

- Recherche d'un couple solution particulier
- Résolution de l'équation homogène associée
- Ensemble des solutions de l'équation (E) dans **Z×Z**, dont on sélectionne les couples qui sont dans **N×N**

La difficulté est d'obtenir ici un couple solution particulier, ce que l'on peut mener à bien à l'aide de l'algorithme d'Euclide étendu, algorithme que tout candidat au CAPES doit pouvoir exposer.

Ou au moins garder sous le coude, car rien n'empêche d'utiliser le subterfuge de l'élève 1 : $(2\ ;\ 74)$ est, sans conteste, un couple solution particulier. Autant utiliser celui-là.

3. Exercices complémentaires

Voir REDCM pages 113 à 117.

Dans les annales ESD, on trouve le plus souvent des situations se ramenant à une équation diophantienne comme celle de ce sujet. Proposent autre chose :

ESD2017_18

ESD2016_18

(Sélection non exhaustive, comme toujours)