ESD2018_15. Modélisation

1. Le sujet

A. Exercice

Une espèce protégée d'oiseaux niche sur une île. On a constaté que sa population diminue de 10 % chaque année. Une association tente de limiter cette diminution en introduisant sur l'île 100 oiseaux chaque année. En 2018, on recense 1 600 oiseaux.
À ce rythme, la population passera-t-elle sous la barre des 1 100 oiseaux? Sous celle des 1 000 oiseaux ? Justifier.

B. Les réponses de trois élèves de terminale scientifique

Elève 1

	A	B	C	…	S	T	…	FV	FW
1	*Année 2018 + n*	*2018*	*2019*	…	*2035*	*2036*	…	*2194*	*2195*
2	*n*	*0*	*1*	…	*17*	*18*	…	*176*	*177*
3	*oiseaux*	*1600*	*1540*	…	*1100,06309*	*1090,05678*	…	*1000,00001*	*1000*
4	*oiseaux-1000*	*600*	*540*	…	*100,06309*	*90,05678*	…	*0,00001*	*0*

J'ai utilisé un tableur. Je constate que la population d'oiseaux passera en dessous de la barre des 1100 oiseaux en 2036 et qu'elle atteindra les 1000 oiseaux en 2195 et se stabilisera. Je pense donc qu'elle ne passera pas sous la barre des 1000 oiseaux. Je peux donc retrancher 1000 dans la ligne 4 et j'obtiens une suite géométrique de raison 0,9. Comme elle tend vers 0, cela prouve ma conjecture.

Élève 2

J'ai programmé un algorithme sur ma calculatrice.
En donnant à la variable S la valeur 1100, j'obtiens 18 ; j'en déduis que la population passera sous la barre des 1100 oiseaux en 2036.
En donnant à la variable S la valeur 1000, j'obtiens 199; j'en déduis que la population passera sous la barre des 1000 oiseaux en 2217.

Élève 3

J'ai utilisé la suite définie par $u_{n+1} = u_n - \frac{10}{100}u_n + 100$

Le tableau de valeurs de ma calculatrice me permet d'affirmer que la population passera sous la barre des 1100 oiseaux, par exemple en 2037, mais ne passera pas sous la barre des 1000 oiseaux.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les productions de ces trois élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez l'aide que vous pourriez leur apporter.

2. Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3. Proposez deux exercices sur le thème *modélisation*, à des niveaux de classe différents, dont l'un au moins permet notamment de développer la compétence «calculer ».

2. Eléments de correction

Voici une situation qui met en scène une suite arithmético-géométrique $u_{n+1} = a\,u_n + b$, dans le cadre d'un modèle à écart exponentiel (voir REDCM page 126).

L'auteur du sujet a choisi d'étudier l'évolution d'une population en diminution naturelle, diminution compensée par un apport extérieur. De ce fait, le coefficient a est tel que $0 < a < 1$; le point fixe est le nombre $c = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{100}{0{,}1} = 1000$; le terme initial est plus grand que le point fixe. Il prévoit ainsi de proposer l'étude d'une suite strictement décroissante et convergente vers 1000

Il est assez édifiant que cet exercice soit proposé dans le thème « *conjecture et démonstration* » et non dans le thème « *suites* ». Il est aussi édifiant de voir que, parmi les productions proposées, aucune n'envisage d'engager une étude un tantinet sérieuse d'une quelconque suite.

Il appartient donc au candidat de proposer une méthode permettant d'étudier, avec une efficacité digne d'une classe d'une terminale scientifique, ce type de suite.

1. Analyse des travaux d'élèves

Bougnègue

Bougnègue modélise la situation à l'aide d'un tableur. Très curieusement, il a disposé ses résultats en ligne, ce qui lui fait utiliser une colonne FW digne des immatriculations des véhicules britanniques. Je reconnais ne pas être assez spécialiste, tant s'en faut, des tableurs pour savoir comment c'est possible. À moins qu'il ne s'agisse simplement d'une nécessité de pagination du sujet pour présenter ce travail aux candidats sur une seule page (?).
Pour ma part, j'aurais disposé en colonnes pour permettre des tirages vers le bas.

La production de Bougnègue présente une initiative majeure et intéressante : s'intéresser à l'écart entre la population d'oiseaux et la constante 1000 (réussite), ainsi qu'une conjecture majeure : la suite de ces écarts est géométrique (réussite). En admettant la nature géométrique de cette suite, Bougnègue justifie la stabilisation de la population par le fait que la raison de cette suite est 0,9 (il faut sans doute comprendre « plus petite que 1 », on lui fera préciser). C'est le seul des trois élèves à faire appel à une propriété d'une suite, en l'occurrence sa convergence (réussite).

Cependant, si un constat suffit pour répondre au cas du seuil 1100 (sa réponse 2036 est recevable), le caractère géométrique de sa suite auxiliaire est du domaine de la *conjecture*.
On incitera Bougnègue à passer à une phase de *démonstration* de cette intéressante conjecture : comment être sûr qu'il s'agit bien d'une suite géométrique ?

Escartefigue

Escartefigue modélise à l'aide d'un algorithme. Bizarrement, l'auteur du sujet a cru bon de ne nous donner aucune information sur son algorithme.
Plutôt que de disserter à vide, je préfère botter en touche. Je présume que le résultat 199 correspond au moment où le logiciel n'a plus la capacité de distinguer le terme calculé de la limite 1000. Place aux spécialistes de l'algorithmique !

Elève 3

Cet élève fait référence explicitement à la notion de suite et détermine la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ entre deux termes consécutifs (« réussites », mais il aurait dû préciser le terme initial pour que sa « réussite » (sic) soit totale sur la définition de cette suite). Il en dresse un tableau des valeurs successives qui induit deux affirmations intéressantes mais qui n'ont pas le même statut.

- L'une des affirmations est avérée : la population d'oiseaux passera en dessous de 1100. La calculatrice justifie qu'en effet, *il existe* une valeur de n telle que $u_n < 1100$. Cet élève a parfaitement le droit de proposer 2037 plutôt que 2036 (peut-être souhaitait-il se réserver une marge ?)

- L'autre est gratuite : le fait que toutes les valeurs du tableau soient >1000 (aussi nombreuses soient-elles) ne prouve pas que, pour d'autres valeurs de n plus grandes, le seuil 1000 ne soit jamais franchi : le fait que $\left(\forall n \leq n_0\right)_{gjulia2018} : u_n > 1000$ (n_0 étant le plus grand indice de son tableau) n'implique pas que $\left(\forall n \in \mathbf{N}\right)_{gjulia2018} : u_n > 1000$. Il s'agit d'une *conjecture*, qu'il sera nécessaire de justifier.

Telle est « l'aide » que l'on peut apporter à cet élève : lui faire distinguer que ses affirmations n'ont pas le même statut, et l'inciter à trouver une justification pour sa deuxième affirmation.

2. Une correction de l'exercice.

L'usage d'un tableur ou d'une calculatrice permet de justifier qu'en effet le seuil de 1100 oiseaux sera atteint en 2035 et franchi en 2036, si toutefois le modèle est encore d'actualité.

On y distingue d'une part la suite « mathématique » générée par le modèle et d'autre part la suite « population d'oiseaux », déduite de la précédente en arrondissant à l'unité.

Il est possible de repérer plus bas dans le tableur à quel moment cette suite d'arrondis va se stabiliser à 1000, mais l'intérêt en est très discutable, il faut attendre plus de 50 ans.

	A num	B ann	C sui	D ois	E	F
=	=seq(r	=num+201	=seqgen(0.9*u(n−1)+	=round(sui,0)		=sui−1000
8	7	2025	1286.98	1287.		286.978
9	8	2026	1258.28	1258.		258.28
10	9	2027	1232.45	1232.		232.452
11	10	2028	1209.21	1209.		209.207
12	11	2029	1188.29	1188.		188.286
13	12	2030	1169.46	1169.		169.458
14	13	2031	1152.51	1153.		152.512
15	14	2032	1137.26	1137.		137.261
16	15	2033	1123.53	1124.		123.535
17	16	2034	1111.18	1111.		111.181
18	17	2035	1100.06	1100.	gilbertjulia2018	100.063
19	18	2036	1090.06	1090.		90.0568

Reste donc le cas du seuil 1000.

Les travaux d'élèves fournissent deux clefs :

L'élève 3 fournit une relation de récurrence, qui permettra de définir la suite (u_n) où u_n désigne la population d'oiseaux lors de l'année $2018+n$. Cette suite est définie par : $_{gjulia2018}\begin{cases} u_0 = 1600 \\ u_{n+1} = 0{,}9\,u_n + 100 \quad \textit{pour tout } n \in \mathbf{N} \end{cases}$

Bougnègue émet l'idée d'introduire une suite auxiliaire, la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 1000$. Il n'y a plus qu'à …

3. Commentaires

L'enseignant a tout intérêt à réserver un temps de réflexion sur un nécessaire « retour au concret » et peut faire remarquer deux choses, sans rapport l'une avec l'autre mais toutes deux importantes :

- Les lignes « oiseaux » et « oiseaux – 1000 » du tableur de Bougnègue (et il y a des chances qu'il ne soit pas le seul dans ce cas) : à partir d'un certain rang, le tableur affiche des décimaux non entiers. Est-ce pertinent ? Que doit-on faire ?
- Est-il pertinent de prévoir une population d'oiseaux jusqu'en 2195 ou en 2217 ? Un modèle d'évolution d'une population a-t-il une durée de vie aussi longue ?

L'enseignant se doit d'inciter ses élèves à garder une attitude critique sur le travail qui leur est donné. Ici, il s'agissait d'un modèle d'évolution, mais il faut avoir à l'esprit qu'un tel modèle, forcément schématique, a ses limites dans le temps et dans sa fidélité à rendre compte d'une situation réelle.

Il peut maintenant « vendre la mèche » : La question : « la population passera-t-elle sous la barre des 1000 oiseaux ? » était une question volontairement provocatrice, destinée à s'interroger sur un comportement à long terme d'une suite, mais en aucun cas il n'était attendu comme réponse une année précise. Bougnègue et Escartefigue sont tombés dans le panneau.

Par ailleurs, je m'interroge sur la pertinence d'une utilisation tous azimuts des moyens numériques pour résoudre ce type de problème. Les lobbies du numérique et leurs laquais ministériels voudraient-ils nous persuader qu'il s'agit d'une panacée ?

Là, on voit le résultat, des productions d'élèves, certes tous fictifs, dont deux sur trois sont totalement insipides (heureusement, l'inénarrable Bougnègue sauve la mise aujourd'hui …) et dont il faut extraire des « réussites » comme des vers d'un nez, alors même que la situation se prêterait à une étude purement mathématique intéressante.

Qu'attend-on exactement d'un candidat ? Qu'il dénonce cet état de fait ? Certes non, ce serait suicidaire pour lui. Il est contraint de jouer le jeu et de feindre l'admiration devant l'ingéniosité numérique de ces épouvantails.

Il lui appartient cependant, s'il le juge opportun, de recadrer un petit peu et de proposer cette étude mathématique, à peine ébauchée ici (voir ci-dessous).

4. Exercices complémentaires

On notera la tournure de la question 3 : « … à des niveaux de classe différents ». Il n'y a pas obligation de proposer un exercice collège et un exercice lycée. Il peut s'avérer fructueux (?), pour l'un des exercices, de puiser dans des annales de sections techniques (sans tomber dans un piège aussi irrémédiable que celui du sujet 2018_3c04).

Nombreux sujets de modélisation dans les annales CAPES.

5. Pour aller plus loin

La notion de suite arithmético-géométrique joue un rôle important dans l'étude des suites au lycée. Ce type de suites est une application incontournable de la notion de suite géométrique, que les candidats se doivent de connaître.

On rencontre ce type de suite notamment en modélisation discrète, dans le cas d'une variation proportionnelle à un écart avec une valeur fixe.

Il est question de suite arithmético-géométrique dans le cas d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ lorsque f est une fonction affine.

Une telle suite est définie ainsi : $\begin{cases} u_0 \ \textit{donné} \\ u_{n+1} = a\,u_n + b \quad \textit{pour tout } n \in \mathbf{N} \end{cases}$. Elle est constante si $a = 0$, arithmétique si $a = 1$ et géométrique si $b = 0$, ce sont là des cas particuliers.

On suppose désormais que a est un réel distinct de 0 et de 1 et que b est un réel non nul.

- La fonction affine f admet un unique point fixe, $c = \dfrac{b}{1-a}$, unique solution dans $\mathbf{R}$ de l'équation $f(x) = x$.
- On associe à la suite (u_n) la suite auxiliaire (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - c = u_n - \dfrac{b}{1-a}$
- Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} \underset{\text{gilbertjulia2018}}{=} u_{n+1} - c = (a\,u_n + b) - c = a(v_n + c) + b - c = a\,v_n$. Cette suite (v_n) est ainsi une suite géométrique, de raison a et de premier terme $v_0 = u_0 - c$.
- La nature géométrique de cette suite permet de préciser une expression explicite de son terme de rang n : $v_n = v_0 \times a^n = (u_0 - c) \times a^n$ et de là on en déduit une expression explicite du terme de rang n de la suite (u_n) : $u_n = v_n + c = (u_0 - c) \times a^n + c$ c'est-à-dire :

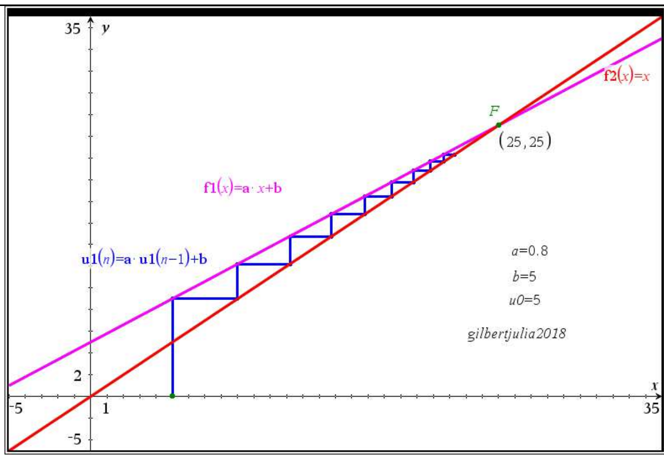
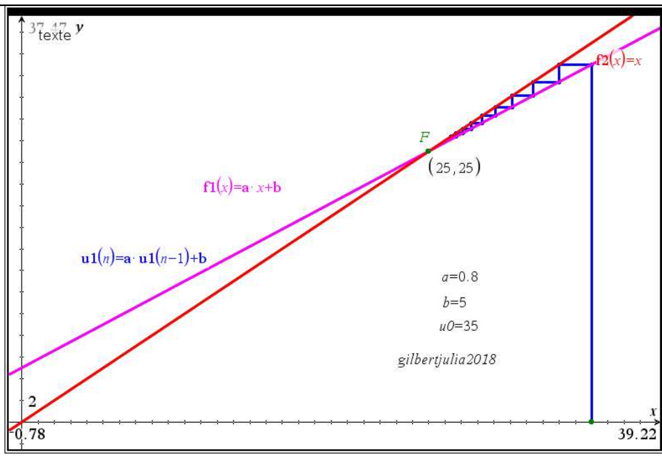
$$\boxed{u_n = v_n + c = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) \times a^n + \frac{b}{1-a}}$$

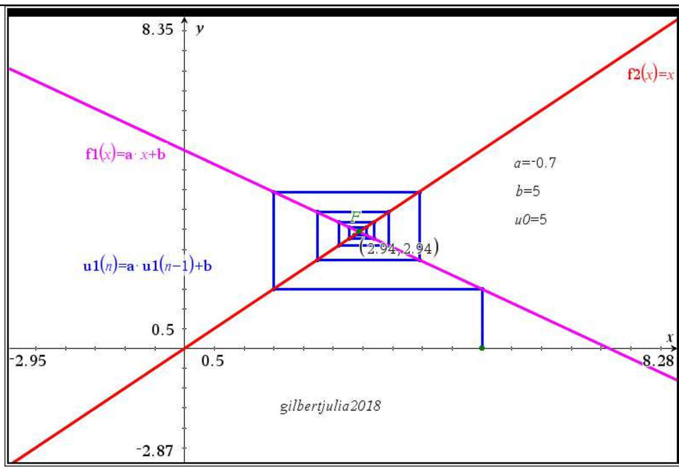
Dans le cas où $u_0 = c$, la suite (u_n) est stationnaire. On suppose désormais que $u_0 \neq c$

Sans entrer dans tous les détails :

- Si a est tel que $-1 < a < 1$, la suite (u_n) converge vers c.
- Si a est tel que $a > 1$ ou $a \leq -1$, la suite (u_n) diverge.

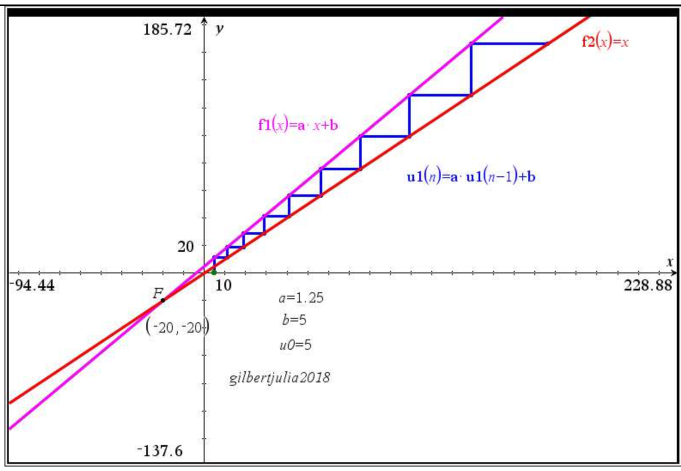
Le choix du coefficient a détermine si la suite est convergente ou divergente. Le signe de a détermine si la suite va être monotone ou non. Lorsque $a > 0$, c'est-à-dire lorsque la suite est monotone, la position du terme initial par rapport au point fixe détermine le sens de variation de la suite.

<table>
<tr>
<td>Ci-contre, $0 < a < 1$ et $u_0 < c$, la suite (u_n) est strictement croissante et converge vers le point fixe.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Ci-contre, $0 < a < 1$ et $u_0 > c$, la suite (u_n) est strictement décroissante et converge vers le point fixe.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Ci-contre, $-1 < a < 0$, la suite (u_n) est non monotone et converge vers le point fixe.

La toile est une toile « en escargot ».</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Ci-contre, $a > 1$ et $u_0 > c$, la suite (u_n) est strictement croissante et diverge vers plus l'infini

….



Dans les sujets d'exercice, le cas le plus fréquent est d'étudier une évolution en diminution naturelle compensée à échéances fixes par un apport extérieur constant (c'est le cas de l'exercice qui nous a occupés aujourd'hui).

Il y a quelques exceptions à cette règle. Je me souviens de mémoire d'un exercice que j'avais proposé il y a quelques années en préparation à l'oral 2 après avoir lu dans le journal local un article sur la prolifération des sangliers (c'était déjà le cas, le phénomène s'est accentué depuis).

Sur le territoire de Saint Marsal, près de La Bastide, les sangliers occasionnent des dommages importants aux cultures.

L'ACCA de la communauté de communes estime la population de sangliers sur son territoire à 2000 individus.

La Société Protectrice des Sangliers estime la population de sangliers sur ce même territoire à 1500 individus.

1. On considère qu'en l'absence de plan de chasse, la population de sangliers augmenterait naturellement de 60 % par an. Dans l'une (ACCA) puis dans l'autre (SPS) hypothèse, au bout de combien d'années la population de sangliers dépasserait-elle 5000 individus ?

2. Pour enrayer la prolifération de sangliers, le président de la communauté de communes a convoqué l'ACCA et la SPS à une réunion extraordinaire. Il est question de définir un plan de chasse pour quelques années, permettant de réguler cette population indésirable.

Le président de l'ACCA, fort de ses 63 saisons de battue, tape du poing sur la table et propose l'abattage de 1000 sangliers par an pendant au moins dix ans, macarel ! Et même plus s'il le faut. La SPS trouve que c'est trop. Qu'en pensez vous ?

Et vous ?