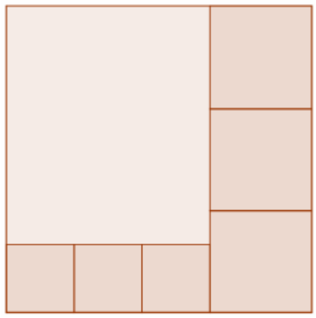
ESD2018_14. Problèmes avec prise d'initiative

1. Le sujet



A. Exercice

Un jardinier a découpé une parcelle carrée pour y installer 7 massifs de fleurs différents comme sur le schéma ci-contre.
La parcelle a été divisée en trois petits carrés de même taille, trois carrés moyens de même taille et un rectangle. L'aire du rectangle est égale à 378 m^2. Quelle est l'aire de la parcelle?

B. Les réponses de deux élèves de seconde

Élève 1

J'ai trouvé que $378 = 21\times18$, *le côté d'un petit carré est donc égal à* $\frac{18}{3} = 6$

De plus le côté d'un carré moyen est $6\times\frac{3}{2} = 9$ *car 2 carrés moyens c'est la même chose que 3 petits carrés.*

Je vérifie qu'avec les longueurs trouvées, la parcelle est bien un carré $3\times6+9 = 27$ *et* $3\times9 = 27$

La parcelle a donc une aire de $27^2 = 729\ m^2$

Élève 2

La largeur du rectangle ne peut pas dépasser 19 m (une largeur est plus petite qu'une longueur). J'ai créé une feuille de calcul où je teste toutes les largeurs possibles du rectangle entre 1 et 19.
Je calcule alors la longueur du rectangle correspondante et les côtés des carrés.
Dans la dernière colonne, je déduis l'aire de la parcelle en faisant la somme des aires des sept massifs la composant.

En E2 j'ai tapé la formule suivante, puis je l'ai recopiée vers le bas :
$= A2*B2+3*C2*C2+3*D2*D2$

Je trouve les 19 solutions possibles mais ce sont des valeurs approchées

	A	B	C	D	E
1	*largeur rectangle*	*longueur rectangle*	*côté d'un petit carré*	*côté d'un carré moyen*	*aire parcelle*
2	1	378,0	0,33	0,5	379,083 333
3	2	189,0	0,67	1	382,333 333
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
19	18	21,0	6,00	9	729
20	19	19,9	6,33	9,5	769,083 333

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les démarches de chacun de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez les aides qui pourraient leur être apportées.

2. Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

3. Proposez deux exercices, un au niveau du lycée et un au niveau du collège, sur le thème *problèmes avec prise d'initiative*, permettant notamment de développer la compétence « raisonner ».

2. Eléments de correction

C'est fou le nombre de jardiniers qui sont en même temps géomètres. Celui d'aujourd'hui abandonne la symétrie des jardins à la française pour nous proposer un plan d'aménagement assez peu esthétique, mais qui donne du grain à moudre aux preneurs d'initiative de tout poil.

Nous y planterions plutôt les trilogies aubergines-poivrons-tomates et laitue-frisée-scarole que des massifs de fleurs quelque peu flétries. Ainsi modifié, l'exercice rappellerait un problème de géométrie posé non loin de Guéret aux épreuves du certificat d'études de 1932.

1. Analyse de travaux d'élèves.
Elève 1
Cet élève propose une résolution opportuniste. Il émet la conjecture que les longueurs des côtés sont des nombres entiers de mètres, conjecture qui paraît défendable (on ne voit guère un jardinier s'amuser de son plein gré à construire des carrés de côté $\frac{19}{7}\sqrt{29}$) et qui s'avère pertinente.
Il trouve la bonne réponse et sa démarche, bien qu'intuitive, est valide.

Deux remarques :
- Il *vérifie* que toutes les conditions imposées sont satisfaites, et c'est cette vérification qui valide sa réponse sans contestation possible.
- Il utilise la décomposition $378 = 18 \times 21$. Pourquoi celle-ci plutôt qu'une autre ? S'il nous répond que l'examen de la figure l'a convaincu que les dimensions du rectangle étaient proches l'une de l'autre, donc qu'il a choisi de préférence la décomposition où les deux facteurs étaient les deux entiers les plus voisins possibles, il nous convaincra à nous aussi.

On note que si on lui rétorque qu'il n'a pas essayé toutes les décompositions en produit de deux facteurs et qu'il y a peut-être d'autres solutions, on sera de mauvaise foi : cette objection est oiseuse, car nous sommes certains qu'il y a une et une seule solution. Il l'a trouvée, c'est très bien, il n'y a aucune raison de rejeter ses arguments.

Bougnègue
Bougnègue crée une feuille de tableur, sans trop savoir pourquoi. Les colonnes semblent en première lecture cohérentes mais pourtant elles ne le sont pas : la longueur du rectangle est égale à l'aire divisée par la largeur, c'est bon ; le côté du petit carré est le tiers de la largeur du rectangle, c'est bon aussi ; celui d'un carré moyen, faudrait voir, cela reste à prouver (on n'a pas la formule qu'il a utilisée). En revanche, l'aire de la parcelle ne correspond à aucune réalité, Bougnègue a explicitement ajouté les aires des sept morceaux. Il serait édifiant de lui proposer de dessiner la parcelle lorsque par exemple la largeur du rectangle est égale à 7. Bougnègue n'a pas pris en compte l'hypothèse : « une parcelle carrée » (erreur de compréhension de l'énoncé). Il a modifié l'énoncé pour le mettre en conformité avec ce qu'il savait tabuler : « en fonction de la largeur du rectangle, donner la somme des aires des 7 morceaux … même si leur réunion est biscornue ».
Le fait qu'il y a dans son tableau une ligne qui fournit la solution est anecdotique. D'ailleurs, Bougnègue ne l'a même pas remarquée.

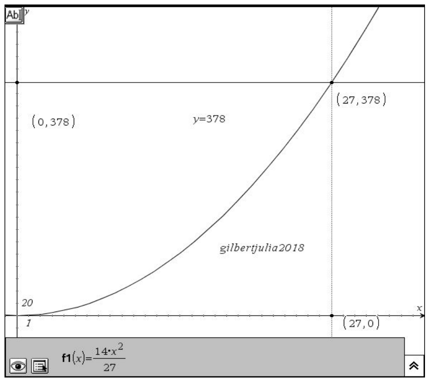
On note en outre que Bougnègue a une conception incorrecte de la notion de mesure. Contrairement à l'élève 1, pour lequel le fait que les carrés ont des côtés entiers est une conjecture, pour Bougnègue il ne peut en être autrement, toutes les largeurs sont des nombres entiers. Il faudrait revenir sur ce point et demander pourquoi la largeur serait forcément un nombre entier (alors que selon son tableur la longueur ne le serait pas).

Aide spécifique : trouver une prise en 380 volts (ou 1500 volts pour plus de sûreté) et lui proposer qu'il branche (lui-même !) son ordinateur dessus.

2. Une correction de l'exercice.

Première méthode, graphique

On note x le côté de la parcelle. Celui d'un carré moyen étant $\frac{x}{3}$ et celui d'un petit carré étant $\frac{2x}{9}$, on en déduit facilement que l'aire du rectangle est une fonction de x, à savoir : gj $A(x)=\frac{14}{27}x^2$.



Une étude graphique montrerait que la courbe représentative de A coupe la droite d'équation $y=378$ au point d'abscisse 27.

Quand $x=27$, l'aire du rectangle est 378 m^2 et l'aire de la parcelle 729 m^2.

Deuxième méthode, algébrique

On désigne par x le côté d'un petit carré, par y celui d'un carré moyen et par, z celui de la parcelle.

Le problème revient à la résolution d'un système de trois équations d'inconnues réelles positives x, y, z puis au calcul de z^2, qui représente l'aire de la parcelle : gilbertjulia 2018 $\begin{cases} z=3y \\ z=3x+y \\ 3x^2+3y^2+378=z^2 \end{cases}$.

Les deux premières équations permettent d'exprimer deux des inconnues, au choix, en fonction de la troisième. Par exemple x et y en fonction de z. $\begin{cases} z=3y \\ z=3x+y \\ 3x^2+3y^2+378=z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{3}z \\ x=\frac{2}{9}z \\ \frac{4}{27}z^2+\frac{1}{3}z^2+378=z^2 \end{cases}$

On obtient que le système a pour triplet solution $(6\ ;\ 9\ ;\ 27)$ et que l'aire de la parcelle est 729 m^2.

Troisième méthode, arithmétique, celle du certif

Chacun des trois carrés moyens ayant un côté égal au tiers de celui de la parcelle, l'aire de chacun est égale à $\frac{1}{9}$ de l'aire de la parcelle, et leurs aires cumulées à $\frac{1}{3}$ de l'aire de la parcelle.

Chacun des trois petits carrés moyens ayant un côté égal à $\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$ de celui de la parcelle, l'aire de chacun est égale à $\frac{4}{81}$ de l'aire de la parcelle, et leurs aires cumulées à $\frac{4}{27}$ de l'aire de la parcelle.

L'aire cumulée des six carrés est égale à $\frac{4}{27}+\frac{1}{3}=\frac{13}{27}$ de l'aire de la parcelle.

L'aire du rectangle est égale à $1-\frac{13}{27}=\frac{14}{27}$ de l'aire de la parcelle.

L'aire de la parcelle est donc égale à : $\frac{27}{14}\times 378=729\ \text{m}^2$

Il n'y a pas photo, cette méthode est, et de loin, la plus économique ; on n'utilise que des calculs de proportions et un peu de bon sens. Reste à savoir si elle est recevable par un jury de CAPES ≥2019.

On peut faire le parallèle entre les deux résolutions, algébrique et arithmétique, qui organisent les données l'une dans un sens de lecture et l'autre dans l'autre sens (l'algébrique dans le sens de lecture de l'énoncé, l'arithmétique dans le sens rétrograde).

NB. Pour mémoire, une quatrième méthode consisterait à établir que tous les carrés partagés en sept morceaux comme décrit dans l'énoncé sont semblables les uns aux autres (c'est pourquoi nous sommes sûrs qu'il y a une et une seule solution). Voir ci-dessus pour une justification. Si on considère le cas particulier d'un grand carré de côté 9 mètres où sont juxtaposés trois petits carrés de côté 2 mètres et trois carrés moyens de côté 3 mètres, on obtient un rectangle complémentaire d'aire 42 m^2. On construit son image par une similitude de rapport $\sqrt{\frac{378}{42}}=3$, on obtient un grand carré de 27 mètres de côté, donc d'aire 729 m^2, trois petits carrés de côté 6 mètres, trois carrés moyens de côté 9 mètres, et un rectangle complémentaire d'aire 378 m^2

3. Commentaires

J'invite le lecteur à juxtaposer et comparer d'une part la méthode du certificat d'études et d'autre part la bouillie numérique de Bougnègue.

Je trouve pour ma part que cette comparaison révèle assez bien le caractère simultanément absurde et dérisoire des méthodes numériques qui se substituent de plus en plus souvent, et de façon irraisonnée comme c'est le cas dans ce contexte, à la pratique des mathématiques.

Malheureusement, le ridicule ne parvient pas à tuer les promoteurs du tout numérique mieux qu'il n'a tué dans d'autres circonstances les prosélytes des compétences. On peut parfois le regretter.