

ESD2018_10. Proportionnalité

1. Le sujet

A. Exercice

En 2017, une entreprise produit 10000 bicyclettes par mois. Suite à une panne, la production de janvier 2018 chute de 10 % par rapport à la production mensuelle de 2017.

1. Quelle augmentation (en pourcentage) faudrait-il réaliser dans le courant du mois de février 2018 par rapport au mois de janvier 2018 pour rattraper la production mensuelle de 2017 ?

2. Pour des raisons techniques, il n'est pas possible de rattraper la production mensuelle de 2017.

En février 2018, l'augmentation de production est de 2 % par rapport au mois précédent. En admettant que ce taux d'augmentation demeure constant d'un mois sur l'autre, en quel mois de l'année 2018 ce rattrapage sera-t-il effectif ?

B. Les réponses de deux élèves

Elève 1.

1. On a baissé de 10%. Il suffit de remonter de 10%.

2. 5 fois 2% égale 10%. Donc on rattrape les 10000 au bout de 5 mois.

Elève 2.

1. On avait 10000 en 2017. Comme on a baissé de 10%, on a fabriqué 9000 bicyclettes. Il faut fabriquer $\frac{1}{9}$ de plus pour retrouver la production initiale, soit une augmentation de 11% environ.

2. On avait 10000 en 2017, donc $10000 - 10\% = 9000$ et 2% de $9000 = 180$. Il faut produire 1000 bicyclettes de plus. Comme $\frac{1000}{180} = 5,5$, au bout de 5 mois on aura pas rattrapé mais au bout de 6 mois oui. Six mois après février cela amène au mois d'août, mais je ne sais pas si l'usine ferme en août.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez la production de chacun de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez l'aide que vous pourriez leur apporter.

2. Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première scientifique.

3. Proposez deux exercices sur le thème *optimisation*, l'un au niveau du collège l'autre au niveau du lycée. L'un des exercices devra permettre de développer la compétence « représenter ».

2. Éléments de correction

Cet exercice porte plus particulièrement sur la notion de pourcentages d'évolution : le taux d'évolution réciproque d'un taux donné (question 1) puis la notion d'évolutions successives (question 2, où il s'agira de passer d'une formulation additive « augmenter plusieurs fois de 2 % » à la structure multiplicative utilisée pour calculer).

On note dans l'énoncé le soin méticuleux de préciser très explicitement à chaque occasion la quantité de référence : « par rapport à ... »

1. Analyse de travaux d'élèves.

Elève 1.

Voici le représentant de ceux des élèves qui en restent à une fausse conception additive de la notion de pourcentage : pour ces élèves, une augmentation signifie une addition et une diminution signifie une soustraction. On ne peut relever aucune réussite dans cette production. Il faut que cet élève prenne conscience de la structure multiplicative associée à la notion de pourcentage, il doit acquérir la notion de coefficient multiplicateur (peut être en envisageant des situations où les taux d'évolution sont plus grands pour mieux séparer les résultats attendus de ceux obtenus avec une conception additive).

Elève 2.

Cet élève répond correctement à la question 1 (réussite).

En revanche, dans la question 2, il passe à une conception incorrecte additive de la composition des pourcentages. Selon lui « le temps mis pour rattraper est le quotient de la quantité à rattraper par la quantité rattrapée le premier mois », ce qui équivaut à dire que l'on rattrape la même quantité chaque mois (erreur). Avec les données de cet exercice, cet élève prendra difficilement conscience de son erreur, puisque la démarche correcte donne au final le même mois que lui.

On note une petite erreur d'interprétation du texte de l'énoncé, il fait partir le rattrapage du 1 mars et non du 1 février. Ce qui le conduit à une certaine pointe d'humour, qui n'est pas si anodine qu'elle n'y paraît : il montre ainsi qu'il est capable, après son traitement mathématique, de prendre de la distance avec le résultat obtenu et de revenir au contexte, c'est-à-dire à conserver une attitude critique vis-à-vis du travail qui lui est demandé (à classer en « réussite » ?).

2. Correction de l'exercice.

1. On peut commencer par contredire le résultat de l'élève 1 : si on applique une baisse de 10 % suivie d'une hausse du même pourcentage, on revient à une production de 9900 bicyclettes. Il en manque 100 ... En effet, la quantité de référence n'est pas la même d'un mois sur l'autre.

Il faut trouver un moyen pour exprimer plus commodément une composition de pourcentages, moyen qui permettrait de tenir compte du changement de la quantité de référence lors de la composition.

Il s'agit pour cela de rappeler ou préciser la notion de coefficient multiplicateur associé à un pourcentage et de souligner son utilité pratique pour effectuer des calculs :

- Augmenter une quantité de t % revient à la multiplier par le coefficient $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$.
- Diminuer une quantité de t % revient à la multiplier par le coefficient $\left(1 - \frac{t}{100}\right)$.

La question 1 amène à préciser ce qu'on appelle le pourcentage réciproque t' % compensant une baisse donnée de t % et le moyen de le déterminer : exprimer que le produit des coefficients multiplicateurs

associés est égal à 1. C'est le nombre t' tel que : $\left(1 + \frac{t'}{100}\right) \times \left(1 - \frac{t}{100}\right) = 1$

En l'occurrence, t' est tel que : $\left(1 + \frac{t'}{100}\right) = \frac{10}{9}$, ce qui donne : $t' = \frac{100}{9} = 11,1$ à 0,1 près

La question 2 se ramène à trouver la première valeur de l'entier n telle que : $0,9 \times 1,02^n \geq 1$.

Au niveau d'une classe de terminale, connaissant les propriétés de la fonction logarithme, cette valeur de n serait : $_{gulia} E\left(\frac{-\ln(0,9)}{\ln 1,02}\right) + 1$. Il ne semble pas que ce soit la correction la plus adéquate, cet exercice n'est pas destiné à un tel niveau.

Une correction alternative de la question 2 utilise un tableur. C'est dans la colonne **round(bic,0)** que l'on lit les résultats qui seront retenus.

La colonne **bicbis** propose le nombre de bicyclettes qui seraient produites chaque mois selon la conception additive des deux élèves.

On remarque la différence fondamentale entre les deux formules qu'on est amené à appliquer (une multiplication dans un cas, une addition dans l'autre).

On peut regretter que quelle que soit la conception que les élèves se font de la situation, le rattrapage a lieu au cours du même mois.

On peut proposer la modification suivante : une chute de 20 % de la production en janvier 2018 puis une augmentation de 4 % d'un mois sur l'autre. Dans ce cas, on crée un décalage d'un mois entre la réponse exacte et la réponse selon la conception des deux élèves. Ce changement de données numériques, et la confrontation aux résultats affichés ci-contre, pourraient aider l'élève 2 à rectifier sa démarche.

A mois	B bic	C	D bicbis	E	F
=seq(n,n,0,11)		=round(bic,			
1	0	9000	9000	9000	
2	1	9180.	9180.	9180	gilbertjulia2018
3	2	9363.6	9364.	9360	
4	3	9550.87	9551.	9540	
5	4	9741.89	9742.	9720	
6	5	9936.73	9937.	9900	
7	6	10135.5	10135.	10080	
8	7	10338.2	10338.	10260	
9	8	10544.9	10545.	10440	
10	9	10755.8	10756.	10620	
11	10	10970.9	10971.	10800	

A mois	B bic	C	D bicbis	E	F
=seq(n,n,0,11)		=round(bic,(
1	0	8000	8000.	8000	
2	1	8320.	8320.	8320	gilbertjulia2018
3	2	8652.8	8653.	8640	
4	3	8998.91	8999.	8960	
5	4	9358.87	9359.	9280	
6	5	9733.22	9733.	9600	
7	6	10122.6	10123.	9920	
8	7	10527.5	10527.	10240	
9	8	10948.6	10949.	10560	
10	9	11386.5	11386.	10880	
11	10	11842.	11842.	11200	

3. Exercices complémentaires

Voir REDCM pages 95 à 97.

Thème rarement abordé explicitement dans les sessions précédentes :

ESD2017_3c05 (mais d'assez loin ...)