ESD2018_08. Suites

1. Le sujet

A. Exercice

Pour tout entier naturel n non nul, u_n est le nombre dont l'écriture décimale est donnée par l'expression suivante : $u_n = \underset{(n\ chiffres)}{111...11}$. On définit alors la somme S_n par : $S_n = 1 + 11 + 111 + ... + \underset{(n\ chiffres)}{111...11}$.

Par exemple $u_3 = 111$; $S_3 = 123$.

Quelle est l'expression de S_n en fonction de n ?

B. Les réponses de deux élèves de première scientifique

Elève 1 :

J'ai rédigé le programme suivant en langage Python. J'ai testé avec différentes valeurs de n :
$S_1 = 1$; $S_2 = 12$; $S_3 = 123$; $S_7 = 1234567$.
En juxtaposant tous les entiers inférieurs à n, j'obtiens S_n : $S_n = 1234...n$

```
def masuite(n):
    s=0
    for k in range(1,n+1):
        s=s+(10**k-1)/9
    return s
```

Elève 2 :

J'ai calculé $u_n = \frac{10^n - 1}{9}$ *pour tout* $n \in N^*$.

En remplaçant dans S_n*, j'obtiens :* $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{10^k - 1}{9} = \frac{1}{9}\left(\frac{1 - 10^n}{-9} - \frac{1}{9}\right)$.

Donc pour tout $n \in N^*$ $S_n = \frac{1}{81}\left(10^n - 2\right)$

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les démarches de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs ainsi que l'accompagnement que vous pourriez leur apporter.

2. Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première scientifique.

3. Proposez deux exercices sur le thème *suites* permettant notamment de développer les compétences « chercher » et « calculer ».

2. Eléments de correction

On appelle « nombre repunit » un entier qui s'écrit en numération décimale uniquement avec le chiffre 1. Le nombre repunit qui s'écrit avec n chiffres 1 est la somme des n premières puissances de dix (de la puissance zéro à la puissance $n-1$). L'exercice proposé contextualise, à propos de ce thème, la notion de somme de termes de suites géométriques. Il s'agit d'un authentique problème de recherche : énoncé court, aucune piste privilégiée ni même suggérée.

Il présente une difficulté pour les élèves, car il s'agit ici de calculer « une somme d'une somme de termes d'une suite géométrique », ce qui est assez inédit au niveau d'une classe de première scientifique.

1. Analyse de travaux d'élèves.

Les deux élèves ont correctement fait le lien entre l'écriture décimale de u_n, le fait que u_n est la somme des n premières puissances de dix (de la puissance zéro à la puissance $n-1$) et l'expression de la somme de ces puissances de dix, à savoir : $10^0+10^1+......+10^{n-1} \underset{gj}{=} \frac{10^n-1}{9}$. Il s'agit là d'une réussite commune d'excellent niveau.

Les démarches divergent lorsqu'il s'agit de proposer une expression de S_n. Alors que l'élève 1 fournira des arguments pour émettre des conjectures, l'élève 2 permettra d'enchaîner vers la recherche d'une formule explicite (conformément à la consigne).

Escartefigue.
Escartefigue écrit un programme en langage Python. Je laisse aux spécialistes de Python (je n'en suis pas un) le soin d'évaluer ce programme. Apparemment, ce programme donne des résultats corrects …

Escartefigue émet une *conjecture* basée sur l'observation de l'écriture décimale des sept premiers termes, conjecture qui, à ses yeux, a valeur de preuve (« ce qui est vérifié pour plusieurs premiers termes est toujours vérifié »). Il confond conjecture et démonstration. Sa conjecture est incorrecte.

Escartefigue confond aussi *l'écriture décimale de* S_n avec une *expression* de S_n en fonction de n.

On peut inciter Escartefigue à continuer ses investigations jusqu'à S_{10} au moins et si possible quelques termes au-delà.

Elève 2.
Cet élève applique une formule qu'il invente pour la circonstance et que je ne suis pas parvenu à décrypter.

On pourrait penser à la pseudo-formule : $\sum_{k=1}^{n}\left(a^k+b\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(a^k\right)+b$ au lieu de $\sum_{k=1}^{n}\left(a^k+b\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(a^k\right)+nb$, mais ce n'est pas tout à fait le cas.

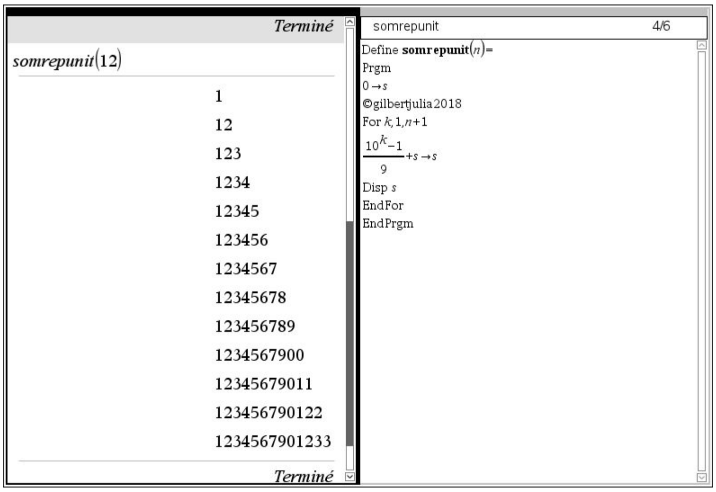
Il semblerait (???) qu'il écrive :

$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{10^k-1}{9}\right)=\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n}\left(10^k-\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{9}\left(\sum_{k=1}^{n}10^k-\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{9}\left(\frac{1-10^n}{1-10}-\frac{1}{9}\right)$, cumulant , outre cette pseudo-formule, une erreur portant sur sa première factorisation par $\frac{1}{9}$, puis une erreur d'indexation sur $\frac{1-10^n}{1-10}$ (on se serait attendu plutôt à $\frac{1-10^{n+1}}{1-10}$). Cela fait beaucoup de suppositions, il y a probablement une autre explication.

On peut lui faire calculer les premiers termes et lui faire constater que sa formule ne coïncide pas avec la calcul de S_3 et ne donne pas des entiers. En revanche, l'idée de chercher une formule explicite est intéressante. Elle sera reprise en correction.

2. Correction de l'exercice.

On reprend le travail de l''élève 1 pour constater qu'effectivement, jusqu'à l'indice 9, sa conjecture donne *l'écriture décimale* de S_n correcte.
Ce n'est plus le cas ensuite.



On met d'une part en garde les élèves contre des « conclusions » trop hâtives : des constats, même nombreux, ne tiennent pas lieu de preuve.

On distingue d'autre part ce que représente l'écriture décimale de S_n de ce que l'on cherche dans cet exercice, une expression explicite de S_n en fonction de n.

On peut avec profit retenir la relation : $9u_n = 10^n - 1$ pour tout entier naturel n non nul.

Proposer alors de calculer : $9S_n = \sum_{k=1}^{k=n} 9u_k = \sum_{k=1}^{k=n}\left(10^k - 1\right)$. Il est utile de séparer la sommation en deux sommations distinctes : $9S_n = \sum_{k=1}^{k=n} 10^k - \sum_{k=1}^{k=n} 1$, c'est-à-dire : $9S_n = 10\dfrac{10^n - 1}{10-1} - n = \dfrac{10^{n+1} - 10}{9} - n$.

On obtient l'expression : $S_n == \dfrac{10^{n+1} - 10 - 9n}{81}$

3. Exercices complémentaires

Sur le thème « *suites* », compétences « chercher » et « calculer »

Liste non exhaustive de sujets de sessions précédentes s'y rapportant :

ESD2017_14

ESD2016_15

ESD2012_11