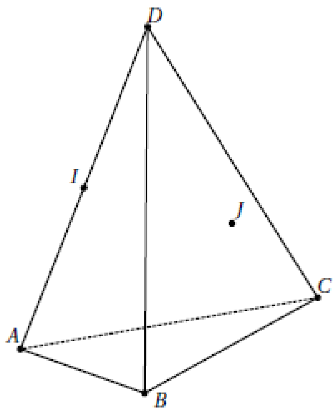
ESD2018_07. Géométrie dans l’espace

1. Le sujet

A. Exercice

ABCD est un tétraèdre. *I* est le milieu du segment [*AD*]. *J* est le point de la face *BCD* défini par : $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$



1. On se place dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AC},\,\overrightarrow{AD}\right)$. Déterminer les coordonnées du point *K*, intersection de la droite (*IJ*) et du plan (*ABC*).

2. Sans utiliser de repère, donner une construction géométrique du point *K*.

B. Les réponses de deux élèves de première scientifique

Elève 1

On trace les droites (I J) et (BC), elles sont sécantes en K.

Les coordonnées du point I sont $\left(0\,;\,0\,;\,\frac{1}{2}\right)$*, celles du point J sont* $\left(\frac{1}{6}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{3}\right)$

On trouve une représentation paramétrique de la droite (IJ) : $\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = \frac{1}{2} - t \end{cases}$ *où t est un réel.*

Ensuite je ne sais pas quoi faire.

Élève 2

Avec un logiciel de géométrie dynamique, je vois que le point K est en dehors du triangle ABC.
Je construis le point L intersection de (DJ) et (BC). Le point K est aligné avec les points A et L mais je ne sais pas déterminer les coordonnées de L et le logiciel ne fournit pas ses coordonnées dans le bon repère.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez la production de chacun de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez les conseils que vous pourriez leur apporter.

2. Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3. Proposez deux exercices sur le thème *géométrie dans l’espace*, l’un au niveau du collège l’autre au niveau du lycée permettant de développer les compétences « représenter » et « raisonner ».

2. Eléments de correction

Cet exercice de géométrie dans l'espace aborde la question de l'intersection d'une droite et d'un plan, et de la détermination de leur éventuel point d'intersection, à l'aide de deux outils : celui de la géométrie analytique puis celui des configurations (propriétés d'incidence).

Alors que la question 1 peut être traitée sans référence nécessaire à une figure, il est en revanche opportun, avant d'aborder la deuxième question, de rappeler que la figure accompagnant l'énoncé est une représentation du tétraèdre $ABCD$ en perspective cavalière.

La question 1 nécessite des étapes intermédiaires : coordonnées de points utiles, caractérisation paramétrique de la droite (IJ), avant de pouvoir déterminer le point K.

1. Analyse de travaux d'élèves.
Elève 1.
Cet élève identifie correctement les différentes étapes intermédiaires permettant de déterminer les coordonnées de K (réussite) : coordonnées (correctes) des points I et J, représentation paramétrique (correcte) de la droite (IJ). Implicitement, un point M appartient à (IJ) s'il existe un réel t tel que : $\overrightarrow{IM} = 6\,t\,\overrightarrow{IJ}$ ce qui lui permet d'avoir des coefficients de t entiers.

Sa réussite s'arrête là et l'on peut donner deux interprétations à son erreur.

- Ou bien il a considéré que l'on cherchait l'intersection de la droite (IJ) et de la droite (BC) et non celle d'une droite et d'un plan (« en géométrie, on cherche toujours l'intersection de deux droites », conception incorrecte des propriétés d'incidence dans l'espace). Dans cette hypothèse, il s'agit d'une erreur de compréhension de la situation. Il faudrait dans ce cas préciser exactement la consigne.
- Ou bien il a considéré que le point d'intersection apparent entre la droite (IJ) et la droite (BC), c'est-à-dire le point d'intersection des images de ces droites par la perspective cavalière, était un point d'intersection authentique (vision de l'espace sans profondeur : « puisque je vois que (IJ) coupe (BC) sur la perspective, si (IJ) coupe le plan (ABC), elle le fait sur la droite (BC) », vision accentuée par la difficulté à matérialiser un plan sur une perspective cavalière). Dans cette hypothèse, il s'agit d'une erreur dans le traitement mathématique de la situation. Une figure sur un logiciel de géométrie dynamique lui montrerait que, suivant la perspective choisie, la position du point d'intersection apparent change relativement à B et C, ce qui serait un brin gênant pour un point d'intersection authentique entre deux droites fixes.

Chouquerouste
On voit ici les limites de ces extraits de productions d'élèves : on ne sait pas à quelle question Chouquerouste tente de répondre.
S'il tente de répondre à la question 1 (le plus probable), je ne connais pas assez les logiciels de géométrie dans l'espace pour savoir s'ils fournissent ou non les coordonnées d'un point d'intersection droite / plan. Apparemment, ce n'est pas gagné.

S'il tente de répondre à la question 2, alors il y a dans sa production deux éléments intéressants :

- K est un point « hors solide ».
- Il est pertinent d'exploiter le point d'intersection L de (DJ) et (BC), deux droites qui sont coplanaires dans le plan (BCD). En effet, le point K appartient à (AL).

Chouquerouste en reste au stade de l'observation et ne s'engage dans aucune réflexion mathématique, il compte sur son logiciel pour lui fournir des résultats tout cuits.

2. Correction de l'exercice.

Dans la correction de l'exercice, on insistera sur les deux méthodes permettant l'une et l'autre la détermination du point d'intersection K.

1. Outil de la géométrie analytique.

La configuration du tétraèdre invite à l'usage du repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right)$, adapté à la situation. Les coordonnées de K s'obtiennent en trois étapes

- Inventaire des coordonnées des points et vecteurs utiles :

Les coordonnées du point I sont immédiates, $I\left(0\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$, celles du point J nécessitent une décomposition suivant la relation de Chasles : $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BD} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et en conséquence $J\left(\dfrac{1}{6}\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{3}\right)$ puis $\overrightarrow{IJ}\ \left(\dfrac{1}{6}\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ -\dfrac{1}{6}\right)$. On note que ce vecteur n'est pas combinaison linéaire des deux seuls vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, la droite (IJ) n'est pas parallèle au plan (ABC), ce qui assure l'existence du point d'intersection K.

- Système d'équations paramétriques de la droite (IJ) :

$M\ (x\ ;\ y\ ;\ z) \in (IJ) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R} : \overrightarrow{IM} = \lambda\,\overrightarrow{IJ}$ ce qui amène au système : gilbertjulia 2018 $\begin{cases} x = \dfrac{\lambda}{6} \\ y = \dfrac{\lambda}{2} \\ z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\lambda}{6} \end{cases}$; $\lambda \in \mathbf{R}$

- Le plan (ABC) étant le plan d'équation $z = 0$, le point K est le point de (IJ) dont le paramètre vérifie $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\lambda}{6} = 0$, c'est-à-dire de paramètre $\lambda = 3$; c'est le point de coordonnées $K\ \left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{3}{2}\ ;\ 0\right)$

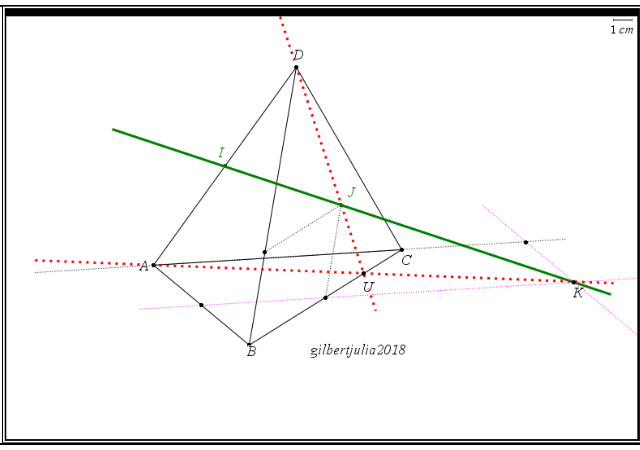
2. Outil des configurations (propriétés d'incidence, tracés « hors solide »)

Cette méthode s'appuie sur les propriétés d'application affine d'une perspective cavalière : du fait que les relations de colinéarité entre les vecteurs y sont conservées, il en est ainsi du parallélisme des droites et de l'alignement des points.

Il s'agit de trouver un plan contenant (IJ) et dont on peut tracer la droite d'intersection avec le plan (ABC). Cette droite est sécante avec (IJ) en son point d'intersection avec le plan (ABC)

Les points A, I, D, J sont coplanaires dans un plan P qui joue le rôle recherché. Le point d'intersection U de (DJ) avec (BC) est dans ce plan, et les points A et U déterminent la droite d'intersection de P avec (ABC). (AU) est sécante avec (IJ) en K.

Ci-contre, la figure regroupe les deux constructions possibles de K : en rouge pointillé épais, suivant la question 2 de l'exercice, en magenta pointillé fin en utilisant les coordonnées du point K suivant la question 1.



3. Exercices complémentaires

Sur le thème *géométrie dans l'espace*, compétence « représenter » et « raisonner »

Liste non exhaustive de sujets de sessions précédentes s'y rapportant :

ESD2014_10

ESD2013_04

ESD2013_08

ESD2011_06