Voici deux sujets regroupés dans un même document, compte tenu de leur voisinage.

ESD2018_05. Problèmes conduisant à la résolution d'équations

1. Le sujet

A. Exercice

Soit k un réel avec $k > 0$. On considère la fonction f_k définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par : $f_k(x) = x - k\ln x$. On note C_k sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Donner, selon les valeurs de k, le nombre de points d'intersection de C_k avec l'axe des abscisses.

B. Les réponses de deux élèves de terminale scientifique

Elève 1
En utilisant un logiciel de géométrie dynamique, je trouve que :
Si $0 < k < 2{,}71$ alors il n'y a pas de solution
Si $k > 2{,}71$ alors il y a deux solutions

Élève 2

On cherche à résoudre l'équation $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{\ln x} = k$. Je pose $g(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ et j'utilise la fonction g. Si $g(x) = k$ alors $g'(x) = 0$. On calcule $g'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0$ donc $x = e$. Après, je ne vois pas.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les démarches de chacun de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez les conseils que vous pouvez leur apporter.

2. Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3. Proposez deux exercices sur le thème *problèmes conduisant à la résolution d'équations*, dont l'un au moins permettra de modéliser une situation extérieure aux mathématiques.

2. Eléments de correction

Cet exercice entre dans la rubrique du programme de terminale scientifique : « Exploiter le théorème des valeurs intermédiaires » pour la recherche du nombre de solutions d'une équation de la forme : $g(x)=k$.
Dans le cas présent, il s'agira de se ramener à ce type d'équation. Tel qu'il est rédigé, cet exercice peut faire l'objet d'une activité de recherche.

Il n'est pas indispensable dans l'énoncé que le repère soit « orthonormé ».

1. Analyse de travaux d'élèves.

Chouquerouste.
Fidèle à sa réputation, Chouquerouste choisit d'expérimenter et l'auteur du sujet n'a malheureusement pas cru bon de nous informer un tant soit peu sur la façon dont il s'y est pris. Conformément à son habitude, Chouquerouste ne prévoit aucun traitement mathématique des résultats qu'il obtient. Il faut l'inciter à s'y engager…
En l'absence d'activité purement mathématique, j'aurais tendance à dire que l'on ne peut distinguer ni « réussite » ni « erreur ». Il est possible qu'un jury de CAPES puisse avoir une opinion différente.

Elève 2.
Cet élève fait implicitement le lien entre le nombre de points d'intersection de C_k avec l'axe des abscisses et le nombre de solutions de chacune de deux équations :
Il ramène l'équation $f_k(x)=0$ en lien direct avec la question posée à une équation du type $g(x)=k$ (réussite). C'est une démarche pertinente, qui sera reprise dans la correction.

Il a ensuite une conception incorrecte du traitement mathématique à appliquer pour déterminer le nombre de solutions de l'équation $g(x)=k$.
Il confond probablement les deux quantificateurs existentiel et universel : « Il existe un réel x tel que $g(x)=k$ » avec : « Pour tout réel x, $g(x)=k$ ».
Dans cette seconde formulation qui semble être la sienne, g serait une fonction constante et sa dérivée devrait être identiquement nulle. Mais le calcul de la dérivée de g, de façon déconcertante pour lui, ne lui donne qu'une seule valeur de x pour laquelle $g'(x)=0$. Il est dès lors tout à fait logique de « ne plus savoir comment faire après ».
Il faudrait revenir sur la signification que cet élève attribue à « $g(x)=k$ » et préciser ce que l'on va être amené à chercher : « Existe-t-il x tel que $g(x)=k$? »

2. Une correction de l'exercice.

On reprend l'idée de l'élève 2 « $f_k(x)=x-k\ln x=0 \Leftrightarrow g(x)=\dfrac{x}{\ln x}=k$ » en faisant le lien entre la question posée et la résolution de l'une ou l'autre de deux équations.

Est-ce bien une équivalence ? Oui, car les fonctions utiles de part et d'autre sont définies sur un même intervalle $]1\,;+\infty[$, intervalle sur lequel $\ln x \neq 0$

On observe la position du paramètre k. À gauche de l'équivalence, il est incorporé à l'expression de f_k, il y est question d'une famille de fonctions. À droite, la fonction utile est toujours la même. Il s'agit de savoir si k appartient ou non à l'intervalle image par g de $]1\,;+\infty[$ (pourquoi un intervalle ?). Il y a avantage à choisir cette option : une seule fonction dont on étudiera les variations, il faudra préciser quel est son intervalle image.

Le calcul de la dérivée de g fait par l'élève 2 est utile, mais son usage est tout différent de ce que prévoyait cet élève : le signe de cette dérivée permet d'étudier les variations de g.

On détermine deux intervalles dans lesquels la fonction g est continue (car dérivable, admis en terminale) et strictement monotone et dans lesquels le théorème des valeurs intermédiaires s'applique :

La fonction g est continue et strictement décroissante sur $]1\,;e]$, l'image de cet intervalle est $[e\,;+\infty[$, tout réel de cet intervalle image admet un antécédent et un seul appartenant à $]1\,;e]$.

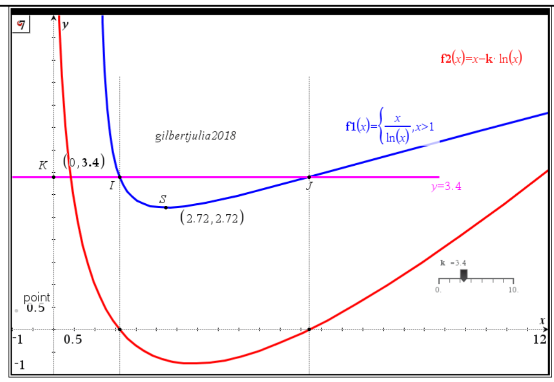
La fonction g est continue et strictement croissante sur $[e\,;+\infty[$, g applique cet intervalle sur lui-même, tout réel de cet intervalle image admet un antécédent et un seul appartenant à $[e\,;+\infty[$.

Ce qui permet de discuter, ce que je laisse terminer …

Pour illustrer le travail fait :

On a inséré un curseur gérant la variable k. En bleu, le courbe représentative de g ; en magenta, la droite d'équation $y=k$; en rouge, la courbe C_k.

Quand on actionne le curseur, lorsque la courbe C_k coupe l'axe des abscisses, la droite d'équation $y=k$ coupe la courbe C_g, et les points d'intersection respectifs ont la même abscisse.



3. Exercices complémentaires

Sur le thème « problèmes conduisant à la résolution d'équations »

Liste non exhaustive de sujets de sessions précédentes s'y rapportant :

Dans ESD2014_09, ESD2012_13, ESD2012_02 les situations appartiennent toutes au domaine des mathématiques.

On peut citer ESD2012_07 pour un domaine extérieur.

ESD2018_11. Fonctions

1. Le sujet

A. Exercice

On considère la fonction f_k définie sur **R** par : $f_k(x)=\mathbf{e}^x-k\,x$ où k est un réel quelconque.

Existe-t-il un réel k, tel que l'axe des abscisses soit tangent à la courbe représentative de la fonction f_k ?

B. Les réponses de deux élèves de terminale scientifique

Elève 1

J'ai utilisé un logiciel de géométrie dynamique. Pour que la courbe représentative de la fonction $f_k(x)=\mathbf{e}^x-k\,x$ *, il faut que* $k=2{,}7$ *:*

Élève 2

On sait que la fonction f_k *admet une tangente à l'axe des abscisses en a.*

On a donc : $f_k'(x)=\mathbf{e}^x-k$ *et donc* $f_k'(a)=0\Rightarrow\mathbf{e}^a-k=0$ *. On sait que* $f_k'(a)=0$ *et que* $f_k(a)=0$ *donc*

$f_k'(a)=f_k(a)$

$\Rightarrow\mathbf{e}^a-k=\mathbf{e}^a-k\,a\Leftrightarrow a=1$ *. Maintenant, il faut trouver k.*

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez le travail de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez les aides que vous pourriez leur apporter.

2. Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3. Proposez deux exercices sur le thème *fonctions*, permettant notamment de développer les compétences « modéliser » et « calculer ».

2. Eléments de correction

Classé dans le thème « *fonctions* », cet exercice se classerait dans un thème « *exemples de situations se ramenant à la résolution d'un système d'équations non linéaires* » si un tel thème existait.

Tel qu'il est rédigé, cet exercice peut faire l'objet d'une activité de recherche.

1. Analyse de travaux d'élèves.

Chouquerouste.
Idem que dans le sujet qui précède.

Elève 2.
Deux réussites :

- Cet élève passe (à peu près) correctement du domaine géométrique dans lequel la question est posée au domaine de l'analyse dans lequel cette question se prête à une résolution (à peu près seulement en raison de son vocabulaire inapproprié qu'il faudra rectifier : une « fonction » n'admet pas de « tangente »).
- Il traduit correctement la condition géométrique en question par deux équations.

Deux erreurs l'une découlant de l'autre :

- Bien qu'il ait identifié deux équations en rapport avec la question, cet élève n'a pas conscience explicitement qu'il s'agit d'un *système de deux équations* qu'il a à résoudre. Ceci, en raison probable d'une utilisation inappropriée des connecteurs $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ qui jouent dans sa production un rôle de transition d'un pas de calcul à un autre.
- De ce fait, il ne tient pas compte de l'utilité dans la résolution de la question de l'équation : $\mathbf{e}^a - k = 0$, qu'il remplace par une équation qu'il ne sait pas résoudre.

Il faut revenir sur son utilisation des connecteurs : leur signification, lesquels sont pertinents, lesquels ne le sont pas, dans ce contexte quelles sont très exactement des conditions équivalentes à la tangence de la courbe à l'axe des abscisses ?

2. Une correction de l'exercice.

On reprend l'idée de l'élève 2, en précisant des conditions équivalentes à la tangence de la courbe C_k représentative de f_k à l'axe des abscisses : ce cas se produit si et seulement si il existe un point $A(a\ ;0)$ de l'axe des abscisses qui appartient à C_k et où la tangente à C_k a pour coefficient directeur zéro

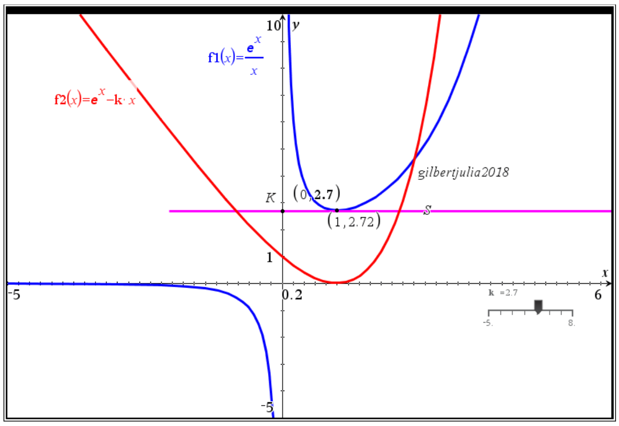
Une condition nécessaire et suffisante est qu'il existe un réel a tel que : $\begin{cases} f_k(a)=0 \\ f_k'(a)=0 \end{cases}$, c'est-à-dire que le système $\begin{cases} \mathbf{e}^a - k\,a = 0 \\ \mathbf{e}^a - k = 0 \end{cases}$ d'inconnues $(a\ ;k)$ ait une solution.

Ce système est équivalent au système : $\begin{cases} k(1-a)=0 \\ \mathbf{e}^a - k = 0 \end{cases}$ et a pour solution $\begin{cases} a=1 \\ k=\mathbf{e} \end{cases}$

Illustration identique à celle du sujet précédent, mais en actualisant les courbes représentatives pour ce sujet.

On a inséré un curseur gérant la variable k. En bleu, le courbe représentative de la fonction $x \mapsto \dfrac{\mathbf{e}^x}{x}$ (qui n'apparaît pas dans le contexte de l'exercice traité actuellement) ; en magenta, la droite d'équation $y=k$; en rouge, la courbe C_k.

Comme l'a remarqué l'élève 1, on conjecture un cas de tangence pour une valeur de k de l'ordre de 2,7 (égale à 2,7 ou bien voisine de 2,7, là est la question …)



3. Exercices complémentaires

Sur le thème « *fonctions*» : voir REDCM pages 120 à 126 puis 136 à 158.

Vaste thème.

4. Commentaires sur ces deux sujets

Il est clair que les deux fonctions f_k qui interviennent dans ces deux sujets sont interchangeables.

J'ai regroupé intentionnellement ces deux sujets pour mettre en évidence qu'une même situation peut provoquer des questionnements différents.

Il appartient à l'enseignant de choisir le travail qu'il veut proposer à ses élèves et la façon dont il va le présenter. Selon l'orientation choisie et l'impulsion qu'il sera en mesure de communiquer à ses élèves, l'enseignant est seul décideur des compétences qu'il fera particulièrement travailler. Nous avons déjà souligné cela dans un sujet précédent, aux candidats d'y réfléchir.

Cas du premier sujet (avec la fonction logarithme)

Dans un idéal absolu, l'enseignant peut très bien commencer par suggérer d'utilisation d'un logiciel de construction graphique (il prévoira alors exploiter dans ce cas un travail type Chouquerouste) :

1. En utilisant un logiciel de construction graphique, conjecturer le nombre de points d'intersection de C_k avec l'axe des abscisses solutions de l'équation.

2. Proposer une valeur approchée du réel k pour lequel la courbe C_k est tangente à l'axe des abscisses. (On rejoint la question posée dans le deuxième sujet)

Une fois ce travail de mise en condition fait, la recherche est relancée : Peut-on prouver ces conjectures ? Peut-on déterminer la valeur exacte du réel k de la question 2 ?

Le lien sera fait à ce moment là entre le nombre de points d'intersection de C_k avec l'axe des abscisses et la résolution d'une équation.

Cas du deuxième sujet (avec la fonction exponentielle)

Dans le cas de ce deuxième sujet, on serait amené à des études très similaires à celles décrites ici si on présentait la situation ainsi :

On désigne par Γ la courbe représentative de la fonction exponentielle dans un repère $\left(O\,;\vec{i},\,\vec{j}\right)$. Par ailleurs, pour tout nombre réel k, on désigne par D_k la droite d'équation $y = k\,x$.

1. Existe-t-il une valeur de k telle que D_k soit tangente à Γ ?

2. Déterminer suivant la valeur de k le nombre de points d'intersection entre D_k et Γ