ESD2018_03. Optimisation

1. Le sujet

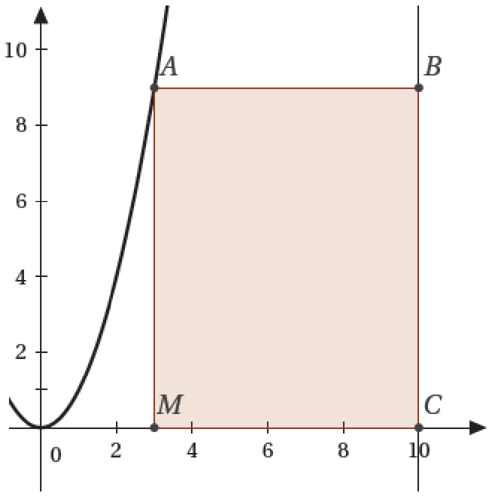
A. Exercice

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

On considère la droite d d'équation $x=10$.

On note Γ la courbe représentative de la fonction carré. Pour tout point M de coordonnées $(x\ ;\ 0)$ avec x réel compris entre 0 et 10, on construit le rectangle $ABCM$ comme sur la figure ci-contre.

Déterminer, si elle existe, une position de M rendant l'aire du rectangle $ABCM$ maximale



B. Les réponses de deux élèves de première scientifique

Elève 1

Lorsque x vaut 0 ou 10, le rectangle est aplati. Son aire vaut 0. Par conséquent la position de M qui rend l'aire maximale est quand $x=5$

Elève 2

Pour $x=1$*, je peux calculer les coordonnées de A* $(1\ ;\ 1)$ *et j'en déduis que* $AM=1$ *et* $MC=9$*. L'aire vaut alors* $1\times 9=9$

Pour $x=2$*, je peux calculer les coordonnées de A* $(2;\ 4)$ *et j'en déduis que* $AM=4$ *et* $MC=8$*. L'aire vaut alors* $4\times 8=32$*. Par ce procédé j'obtiens ce tableau :*

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
aire	9	32	63	96	125	144	147	128	81

J'en déduis que la position de M qui rend l'aire maximale est quand $x=7$

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez la production de chacun de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez l'aide que vous pourriez leur apporter.

2. Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première scientifique.

3. Proposez deux exercices sur le thème *optimisation*, l'un au niveau du collège l'autre au niveau du lycée. L'un des exercices devra permettre de développer la compétence « représenter ».

2. Eléments de correction

Cet exercice d'optimisation a été fabriqué spécialement pour que la fonction objectif à optimiser soit une fonction polynôme du troisième degré. Un tel exercice est opportun au niveau première, en lien avec les méthodes d'étude des variations d'une fonction et l'outil de la dérivation, au moment où l'éventail des types de fonctions que l'on peut proposer aux élèves commence à s'élargir.
On note que l'énoncé ébauche le processus de modélisation que les élèves devront mener à bien, en indiquant la variable x permettant de décrire la situation et le domaine sur lequel cette variable sera définie. Il reste à déterminer puis à étudier sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ la fonction aire correspondante.

1. Analyse de travaux d'élèves.

Elève 1.
Cet élève se construit une fausse représentation de la situation.
Aux yeux de cet élève, la fonction « aire du rectangle » est une fonction polynôme du deuxième degré. Deux indices peuvent le convaincre que cette propriété est « évidente », d'une part l'aire d'un rectangle est le produit de ses deux dimensions, d'autre part la présence d'une parabole le conforte peut-être qu'il s'agit bien d'un problème du deuxième degré.

En conséquence, il applique une propriété de symétrie des fonctions polynômes du deuxième degré : si f est une telle fonction et si a et b sont tels que $f(a)=f(b)$, alors f est extrémale en $\dfrac{a+b}{2}$.
Ce raisonnement le dispense et de calcul et de souci de vérification de son résultat.

Cet élève met en évidence intuitivement *l'existence* d'un maximum de la fonction (implicitement continue sur un segment) « aire du rectangle » mais il échoue dans sa détermination.

On peut confronter cet élève au tableau de l'élève 2 qui met en évidence une dissymétrie incompatible avec le comportement d'une fonction du deuxième degré.

Cet exercice est destiné particulièrement à des élèves comme celui-ci, pour remettre en cause les propriétés de symétrie des fonctions « habituelles » (second degré, homographiques, …) qu'ils ont rencontrées jusque là.

Elève 2.
Cet élève utilise une démarche artisanale que l'on pourrait développer au niveau d'une classe de troisième, mais qui n'est plus valide en première. Il détermine implicitement une formule donnant (correctement de toute évidence) l'aire du rectangle en fonction de x puis il remplit un tableau de valeurs en reprenant sa formule pour chaque valeur de x figurant dans son tableau.

On pourrait envisager deux aides différentes :

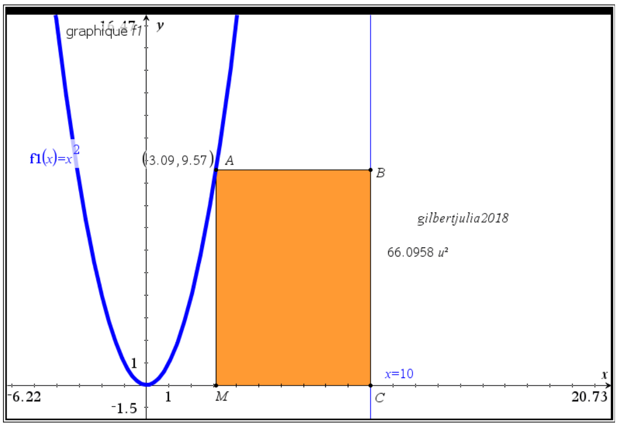
- Lui demander d'automatiser le calcul de l'aire puis de reprendre son tableau avec une précision plus importante (avec un pas 0,1 entre 6 et 8 par exemple), ce qui pourra aboutir à une résolution approchée de la question. Mais sera-t-il pour autant au bout de ses peines ?
- Lui demander d'expliciter l'expression en fonction de x de la fonction « aire du rectangle» et de trouver un outil mathématique susceptible de permettre l'étude des variations de cette fonction (c'est l'objectif de l'exercice …)

2. Correction de l'exercice.

On explicite la fonction aire : $A(x)=(10-x)\times x^2=10x^2-x^3$, définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$
(Je laisse le soin de continuer).

De façon un peu plus générale, où la droite d a pour équation $x=c$, avec c réel strictement positif, et où M est un point dont l'abscisse est comprise entre 0 et c, le rectangle a pour dimensions : $MC=c-x$ (fonction affine de x) et $AM=x^2$ (fonction du deuxième degré en x). C'est pourquoi la fonction « aire du rectangle » est dans ces circonstances une fonction du troisième degré : $A(x)=(c-x)\times x^2=c\,x^2-x^3$

L'outil de la dérivation permet d'étudier les variations de cette fonction sur l'intervalle $[0\ ;\ c]$ et de mettre en évidence l'existence d'un maximum pour $x=\dfrac{2c}{3}$.



Dans le présent contexte, toute la correction devant un jury se fait avec $c=10$ (il n'y a pas lieu de généraliser), ce qui est un choix judicieux, meilleur par exemple qu'une valeur entière de c multiple de 3 et pour laquelle l'élève 2 aurait obtenu sans coup férir le maximum exact.

.

3. Exercices complémentaires

Sur le thème « *optimisation* », compétence « représenter »

Liste non exhaustive de sujets de sessions précédentes s'y rapportant :

ESD2017_09

ESD2014_06 (très opportun me semble-t-il)

ESD2013_04

4. Pour aller plus loin

L'exercice d'aujourd'hui entre dans une catégorie de situations fabriquées de toutes pièces pour amener à l'étude d'une fonction et à son optimisation. Voici une telle « fabrication », sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$

Schématisons.

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ et Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On suppose f dérivable, positive et strictement croissante. On désigne par D la droite d'équation $x=1$. et I le point de coordonnées $I(1\ ;\ 0)$

Pour tout réel x tel que $0 \leq x \leq 1$, on désigne par M le point d'abscisse x de la courbe Γ, par H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses et par J le projeté orthogonal de M sur la droite D.

On s'intéresse à l'aire du rectangle *HMJA* : peut-on choisir x de façon que cette aire soit maximale ?

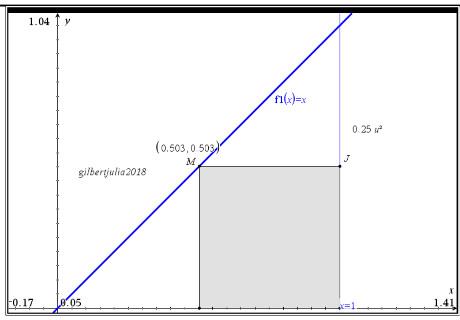
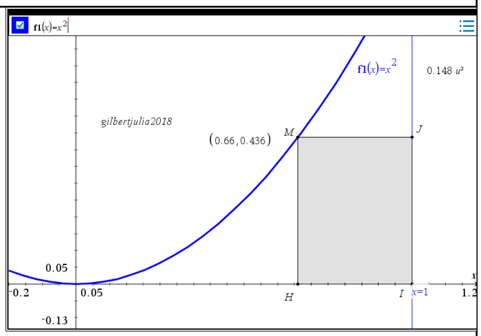
Outre *I,* les points utiles ont pour coordonnées $H(x\ ;\ 0)$; $M(x\ ;\ f(x))$ et $J(1\ ;\ f(x))$.

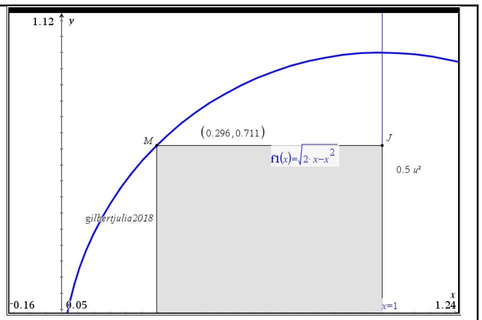
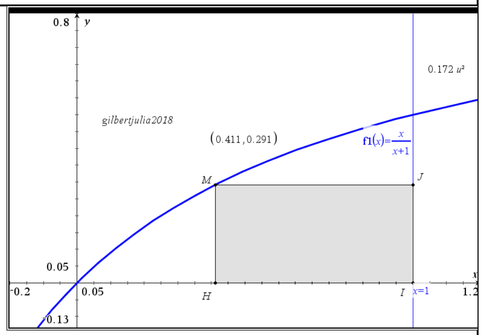
L'aire de *HMJI* s'exprime en fonction de x par : $A(x)=(1-x)\times f(x)$.

Suivant le choix de la fonction *f*, l'enseignant peut agir plus ou moins à sa guise sur le type de fonction « aire » que l'on obtient.

C'est ce que les didacticiens appellent une « variable didactique » de la situation.

Un bref inventaire (quelques exemples à vérifier…)

Fonction f	Fonction aire	Optimisation quand	
$f(x)=x$	$A(x)=x-x^2$ fonction polynôme du deuxième degré	$x=\dfrac{1}{2}$	
$f(x)=x^2$	$A(x)=x^2-x^3$ fonction polynôme du troisième degré	$x=\dfrac{2}{3}$	

$f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ fonction représentée par un quart de cercle	$A(x)=(1-x)\times f(x)$ fonction avec radical	$x=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	
$f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ homographique	$(x)=-x+2-\dfrac{2}{x+1}$ fonction rationnelle	$x=\sqrt{2}-1$	

En variant la fonction *f*, on obtient des fonctions aires dont l'étude est très rapidement plus exotique (ne serait-ce que $f(x)=x^2+\dfrac{1}{5}$ par exemple, beaucoup plus exotique , on pourra le constater, que $f(x)=x^2+\dfrac{1}{3}$)