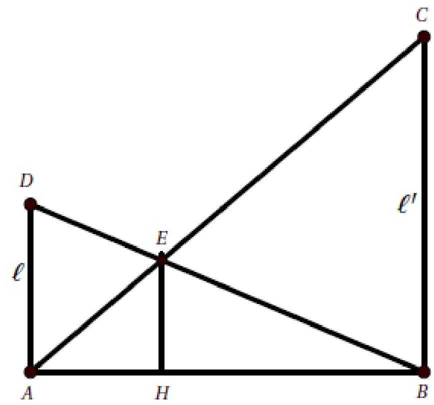
ESD2018_01. Géométrie plane

1. Le sujet

A. Exercice



On considère un trapèze rectangle *ABCD* de bases [*AD*] et [*BC*].

- Les longueurs des segments [*AD*] et [*BC*] sont fixes, notées respectivement *l* et *l'*.
- *E* est le point d'intersection des segments [*AC*] et [*BD*].
- *H* est le projeté orthogonal de *E* sur la droite (*AB*).

Lucas affirme : « En rapprochant les points *A* et *B*, je peux diminuer la distance *EH* ». A-t-il raison ?

B. Les productions de trois élèves de seconde

Elève 1

A l'aide d'un logiciel de géométrie, j'ai vu que le point E reste à la même hauteur mais je ne sais pas le prouver. Donc Lucas aurait peut-être tort.

Elève 2

J'ai utilisé le théorème de Thalès : (EH) // (BC) donc $\frac{AH}{AB} = \frac{EH}{BC}$

Si la longueur AB diminue alors AH diminue et la distance EH aussi puisque BC est fixe.
Lucas a raison

Elève 3

Dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}\right)$ *la droite (AC) a pour équation :* $y = l'x$

La droite (BD) a pour équation : $y = 1 - x$ *. J'ai résolu l'équation :* $`l'x = 1 - x$

J'en déduis les coordonnées du point $E\left(\frac{1}{1+l'}\ ;\ \frac{l'}{1+l'}\right)$*. Donc le point E est fixe et Lucas a tort*

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les productions de ces trois élèves en mettant en valeur leurs réussites et en précisant leurs erreurs. Vous indiquerez l'aide que vous pourriez leur apporter.

2. Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

3. Proposez deux exercices, un au niveau du collège et l'autre au niveau du lycée, sur le thème *géométrie plane* permettant notamment de développer la compétence « chercher ».

2. Eléments de correction

Voici un exercice qui porte sur un calcul de longueur ; aussi bien, il aurait pu figurer dans le thème « *conjecture et démonstration* » si l'enseignant avait formulé autrement son énoncé. Lucas émet une *conjecture* et il appartient aux élèves soit de justifier soit d'infirmer par un raisonnement cette conjecture.

Le résultat aurait été identique si le trapèze *ABCD* avait été quelconque et si *H* était le point d'intersection de la parallèle aux bases menée par *E* avec (*AB*). Cependant, le fait d'avoir particularisé le trapèze en trapèze rectangle et de définir *H* comme projeté orthogonal de *E* sur (*AB*) est pertinent en ce sens qu'il économise dans l'énoncé toute allusion explicite à un parallélisme éventuel, parallélisme qui résulte ici de la perpendicularité de trois droites à une même quatrième (il appartient aux élèves de le justifier).

1. Analyse de travaux d'élèves.

Chouquerouste

Cet élève emblématique, authentique Monteverdi du logiciel de géométrie, parvient à une conjecture mais ne s'engage dans aucune démarche mathématique. Je ne reviens pas sur son cas maintes fois rencontré.

Elève 2

Cet élève évoque à bon escient l'utilisation (qu'il devrait cependant justifier) du théorème de Thalès dans une configuration triangle (réussite).
Il est en échec ensuite car il emploie un théorème-élève incorrect à propos de la notion de fraction : « si le numérateur et le dénominateur d'un fraction diminuent tous les deux, alors le quotient diminue lui aussi ».
Il faudrait que cet élève prenne conscience que si le numérateur et le dénominateur d'une fraction varient tous les deux *dans les mêmes proportions*, alors le quotient ne change pas.

***Elève* 3**

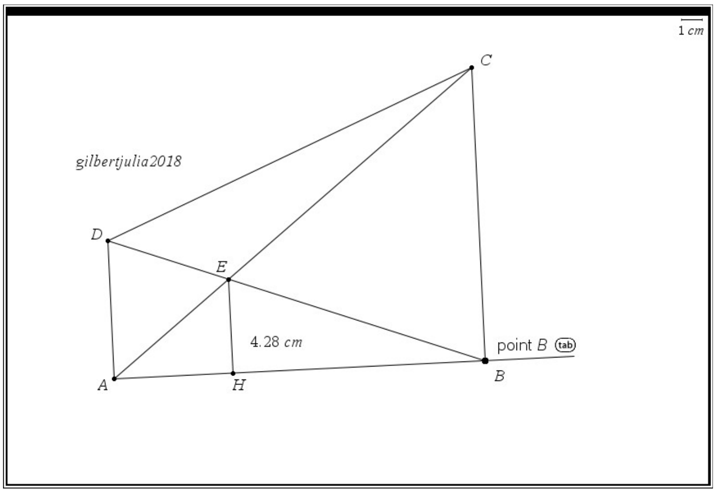
Cet élève utilise l'outil de la géométrie analytique, peut-être parce que la configuration d'un trapèze rectangle favorise le choix d'un repère (?). Son idée est intéressante : chercher dans le repère qu'il choisit les coordonnées du point d'intersection de (*AC*) et de (*BD*). On pourra éventuellement faire aboutir son idée, mais en l'état, bien que la conclusion « Lucas a tort » soit exacte, la démarche de cet élève est invalide.

Il considère que $l=1$ sans le préciser explicitement. Cela n'a aucune incidence car la configuration dépend du rapport $\frac{l'}{l}$ et non de l et l' eux-mêmes (il est donc légitime de convenir que $l=1$, encore faut-il le dire). Il aurait dû obtenir $y=\frac{l'}{l}x$ pour équation de (*AC*). Il s'agit là d'une imprécision, non d'une erreur.

Une erreur avérée d'interprétation du résultat : le repère choisi dépend des positions relatives de *A* et de *B*, ce n'est pas un repère fixe. Il faudrait donc que cet élève revienne sur ce que l'utilisation de son repère permet de déterminer (le coefficient de colinéarité entre $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{AD}$ par exemple) et ce qu'il ne permet pas de démontrer (on ne peut pas y calculer une distance, un point dont la position dépend de B n'est pas un point fixe, …).
La confrontation à une figure dynamique pourrait contredire la conclusion « *E* point fixe » de cet élève.

2. Correction de l'exercice.

Dans cette situation, il est possible d'utiliser après un premier temps de réflexion un logiciel de géométrie dynamique (celui de l'élève 1 par exemple) pour que les élèves confortent (ou non) leur propre idée sur la conjecture de Lucas.



On déplace le point *B* sur une demi-droite d'origine *A*.

On note ce qui reste indépendant de la déformation lorsqu'on dynamise la figure. Il semble bien que Lucas n'a pas raison …

Puisque les droites (*EH*), (*AD*) et (*BC*) sont toutes trois perpendiculaires à (*AB*), ces trois droites sont parallèles.

Variante 1. Outil des configurations
Il s'agit de faire apparaître que le segment [*EH*] intervient dans deux configurations « triangles » de Thalès :

- D'une part dans le triangle *ABC* : $\frac{EH}{BC}=\frac{AH}{AB}$
- D'autre part dans le triangle *BAD* : $\frac{EH}{DA}=\frac{BH}{BA}$

Il reste à obtenir une relation entre $\frac{AH}{AB}$ et $\frac{BH}{BA}$, en l'occurrence $\frac{AH}{AB}=\frac{(AB-BH)}{AB}=1-\frac{BH}{AB}$, relation qui conduira à : $EH=\frac{BC\times DA}{BC+DA}$ ou $EH=\frac{l\times l'}{l+l'}$ avec les notations proposées. On conclut que *EH* ne dépend que de *l* et *l'* et non des positions relatives de *A* et de *B*.

Variantes 2. Outil de la géométrie analytique

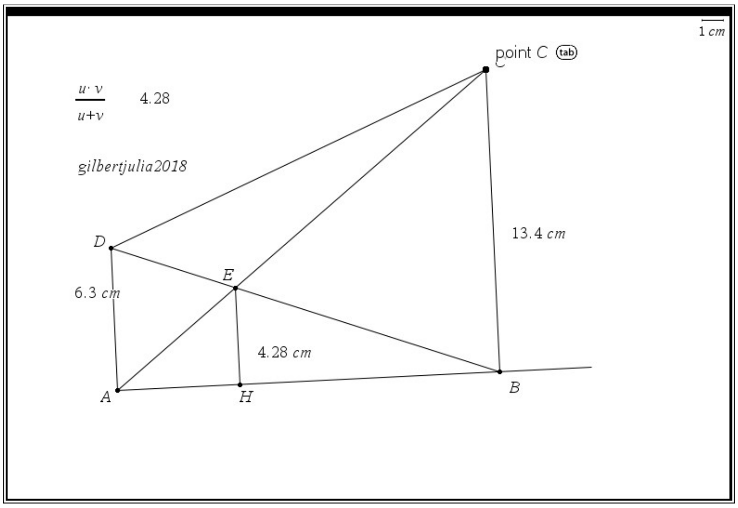
On reprend l'idée de l'élève 3.
Variante 2.1. On peut utiliser le repère $\left(A,\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}\right)$, mais avec l'inconvénient qu'il s'agit d'un repère orthogonal qui de plus dépend des positions relatives de *A* et *B*. Dans ce repère, on obtient $y=\frac{l'}{l}x$ pour équation de (*AC*) et $y=1-x$ pour équation de (*BD*). Le point *E* a pour coordonnées dans ce repère : $\left(\frac{l}{l+l'},\ \frac{l'}{l+l'}\right)$.

On en conclut que $\overrightarrow{HE}=\frac{l'}{l+l'}\overrightarrow{AD}$: le rapport de colinéarité ne dépend pas des positions relatives de *A* et de *B*, donc la distance EH n'en dépend pas non plus.
On pourrait en conclure également que $\overrightarrow{AH}=\frac{l'}{l+l'}\overrightarrow{AB}$ donc que $\frac{AH}{AB}=\frac{l'}{l+l'}$, les distances *AH* et *AB* varient dans les mêmes proportions (ceci à l'intention de l'élève 2).

Variante 2.2. On peut utiliser un repère orthonormal d'origine A et d'axes (AB) et (AD) dans lequel on pourra exprimer n'importe quelle distance.
On note b l'abscisse de B. Le point D a pour ordonnnée l et le point C pour coordonnées $(b,\, l')$.
Une équation cartésienne de (AC) : $l'\,x - b\,y = 0$
Une équation cartésienne de (BD) : $l\,x + b\,y - b\,l = 0$
Le point E a pour coordonnées dans ce repère : $\left(\dfrac{b\,l'}{l+l'}, \dfrac{l\times l'}{l+l'}\right)$ et en conséquence $EH = \dfrac{l\times l'}{l+l'}$. Cette longueur est indépendante de b, ce qui infirme la conjecture de Lucas.

(On retrouve au passage également le fait que $\dfrac{AH}{AB} = \dfrac{l'}{l+l'}$)

On revient en fin de correction au logiciel de géométrie pour valider le travail fait. On a calculé l'expression $\dfrac{l\times l'}{l+l'}$ (en haut à gauche) et cette fois on déplace l'un ou l'autre des points C ou D sur des perpendiculaires à (AB). On note la concordance du résultat avec l'affichage de la longueur du segment $[AH]$.



3. Exercices complémentaires

Sur le thème « *géométrie plane* », compétence « chercher »

Liste non exhaustive de sujets de sessions précédentes s'y rapportant :

ESD2015_13

ESD2015_16 (exercice difficile)

ESD2014E_06

ESD2012_12