

ESD2017_3c05. Grandeurs et mesures

1. Le sujet

A. Exercice

Un restaurateur propose en dessert des coupes de glace composées de 3 boules sphériques, de rayon 2,1cm. Les pots de glace au chocolat ont la forme d'un pavé droit (de dimensions 12cm, 20cm et 15cm) et sont tous pleins, tout comme les pots de glace à la vanille qui eux, sont cylindriques (de hauteur 15cm et dont la base a pour diamètre 14cm). Le restaurateur veut préparer des coupes avec deux boules au chocolat et une boule à la vanille.

- 1 – Sachant que le restaurateur doit produire 100 coupes de glace, combien doit-il acheter de pots au chocolat et de pots à la vanille ?
- 2 – Aura-t-il suffisamment de glace s'il veut augmenter sa production de coupes de 20%?

B. Les réponses de deux élèves de cycle 4 à la question 1

Elève 1

J'ai calculé le volume d'une boule de glace c'est environ 39 cm³.

Le volume du pot de glace à la vanille est de 9236 cm³ et celui du pot de chocolat 3600 cm³.

$$9236 \div 39 = 237$$

$$3600 \div 78 = 46$$

Il doit acheter 237 pots de vanille et 46 pots de chocolat.

Mais j'ai dû me tromper car il ne devrait pas acheter autant de pots de vanille.

Élève 2

J'appelle x le nombre de pots de vanille et y celui de pots de chocolat.

J'ai calculé le volume total de glace, c'est 2309x + 3600y.

Une boule a pour volume 38,5 cm³ donc une coupe a pour volume de glace 3 × 38,5 = 115,5.

Comme il faut 100 coupes, je vais résoudre l'équation 2309x + 3600y = 11550.

J'ai testé différentes valeurs de x et y, avec x = y = 2 on obtient 11818 c'est le plus proche.

Donc il faut 2 pots de vanille et 2 pots de chocolat et il lui restera un peu de glace.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites, les compétences développées par chacun et leurs éventuelles erreurs.
2. Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de troisième.
3. Proposez trois exercices sur le thème *grandeurs et mesures* dont l'un au niveau lycée. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves

2. Eléments de correction

Sur le thème « *grandeurs et mesures* », le problème proposé aujourd'hui se distingue par sa polyvalence. Il s'agit en effet de :

- Calculer des volumes de trois solides classiques en cycle 4 : pavé, cylindre, boule.
- Effectuer un changement d'unités, le volume d'une boule de glace devenant une unité de mesure de contenance pour les pots à glace. Une difficulté est que, si cette unité est commensurable avec le volume du cylindre, elle ne l'est pas avec celui d'un pavé.
- Dans la question 2, appliquer un pourcentage (« *Les situations mettant en jeu des grandeurs restent privilégiées pour mettre en place et organiser des calculs faisant intervenir la proportionnalité, en particulier les pourcentages* » suivant une directive des programmes)

D'autre part, le fait de considérer dans la première question deux mesures différentes amène à devoir analyser le problème, le reformuler et construire une argumentation mathématique utilisant des résultats intermédiaires pour le résoudre (le cas de l'élève 2 illustre la difficulté de cette action).

Enfin, la longueur de l'énoncé et la multiplicité des données constituent une difficulté de ce problème, rendant délicates l'extraction au bon moment et l'organisation des informations utiles.

Il s'agit d'un problème complexe mêlant réinvestissement (calcul de volumes) et recherche (trouver un moyen de déterminer le nombre de pots de chaque espèce, le calcul de volumes n'étant pas une fin en soi dans ce problème) nécessitant une argumentation et se prêtant au débat.

1. Analyse de travaux d'élèves.

Elève 1.

Solution incorrecte.

Cet élève calcule le volume des trois solides en jeu, en arrondissant les résultats à l'entier le plus proche.

Il connaît manifestement les formules donnant les volumes de ces trois solides (réussite).

Selon lui, en divisant les volumes des pots par le volume d'une boule, il obtient le nombre de pots.

On relève une erreur dans le calcul d'un volume (il a utilisé le diamètre du cylindre et non son rayon, il obtient quatre fois le volume du cylindre).

Cependant, c'est principalement la compréhension de la situation qui le met en échec, avec la confusion entre nombre de boules et nombre de pots. Cette erreur est peut-être causée par la longueur de l'énoncé et la multiplicité des données, dont il finit par perdre de vue la signification.

Il critique partiellement son résultat (réussite « partielle » donc ...), mais ce n'est pas la quantité considérable de pots nécessaires, c'est plutôt la disparité entre 237 et 46 qui l'interpelle.

Il faudrait d'abord lui faire corriger le calcul du volume du cylindre (lui faire donner la formule qu'il connaît sans doute puis lui demander quelle donnée de l'énoncé il a utilisée). Il corrigera son nombre de pots (59 au lieu de 237). Il est probable qu'il soit à ce moment satisfait de son résultat. On peut alors lui demander un ordre de grandeur de la quantité de glace obtenue, par exemple quelle place occuperait *grosso modo* dans le congélateur de ses parents 59 pots de vanille et 46 pots de chocolat ...

Elève 2.

Solution incorrecte. Cet élève a résolu une autre question que celle posée.

Cet élève calcule correctement le volume des trois solides en jeu (réussite, bien qu'on relève une légère erreur d'arrondi dans le volume de la boule).

Il modifie ensuite le sens du problème en l'adaptant à une situation qu'il a visiblement déjà rencontrée.

Il résout avec succès le problème suivant : comment confectionner 100 coupes de glace vanille-chocolat en utilisant un *minimum* de glace ? Il cherche la solution minimale de $2309x + 3600y > 11550$. (On

gijulia2018

peut lui faire remarquer qu'il aurait dû résoudre $2309x + 3600y > 11638$ en corrigeant son erreur d'arrondi, ce qui ne change rien au raisonnement)

C'est la modélisation de la situation qui met cet élève en échec, plus particulièrement le fait de considérer deux mesures différentes induit une modélisation invalide. Sa modélisation, bien qu'invalide, reste cependant cohérente.

Il faudrait faire vérifier à cet élève si, avec deux pots de chaque sorte, il pourra ou non proposer la totalité des 100 coupes conformes à l'énoncé (lui faire calculer le nombre de boules de chaque sorte dont il dispose).

Cet élève fait preuve de compétences avérées : s'engager dans une démarche, traduire en langage mathématique une situation réelle (sa modélisation correspond exactement au problème de minimisation évoqué ci-dessus), développer une argumentation mathématique adéquate (le couple $(2; 2)$ est bien la solution minimale de l'inéquation qu'il s'est proposé de résoudre).

2. Une correction de l'exercice.

Question 1

Etape 1 : les volumes

Commencer par vérifier le calcul des volumes des trois solides, en gardant les valeurs exactes puis en donnant un encadrement du résultat pour avoir un ordre de grandeur si utile :

- 3600 cm^3 pour le pavé.
- $735\pi \text{ cm}^3$ pour le cylindre, sachant que $2309 < 735\pi < 2310$
- $\frac{3087\pi}{250} \text{ cm}^3$ pour la boule sachant que $38,7 < \frac{3087\pi}{250} < 38,8$ (pourquoi encadrement au dixième pour la boule de glace ?)

Etape 2 : les contenances

Ensuite, faire expliciter à l'élève 1 ce qu'il a réellement calculé. Il s'agit de calculer combien de boules de glace on peut confectionner avec un pot. Ces nombres désignent la contenance d'un pot en boules de glace (comme celle d'un baril de pétrole en gallons, si les élèves ont fait un tel exercice).

Pour le pavé, certains peuvent trouver $\frac{100000}{343\pi}$, l'élève 1 trouve 92,31 et l'élève 2 trouve 93,5

suivant l'utilisation ou non d'un arrondi. On pose la question de savoir s'il vaut mieux arrondir d'abord et faire les calculs ensuite, ou bien faire les calculs d'abord et arrondir ensuite.

On conclut qu'avec un pot de chocolat, on peut confectionner 92 boules (et non 93, il faut arrondir à l'unité inférieure et arrondir de préférence en fin de calcul).

Pour le cylindre, certains peuvent trouver $\frac{1250}{21}$, l'élève 1 trouve 59,2 et l'élève 2 trouve 59,97. Tout le monde trouve 59 boules, mais un usage prématuré d'arrondi aurait bien pu avoir une incidence.

Etape 3 : résolution

Pour 100 coupes, il faut trois pots de chocolat qui permettront de confectionner 276 boules et deux pots de vanille qui permettront de confectionner 118 boules.

Question 2. Augmenter la production de 20 % revient à confectionner 240 boules au chocolat (c'est possible) et 120 boules de vanille (il en manquera). Le restaurateur pourrait, en raclant le fond des pots de vanille, augmenter sa production de 18 % puisqu'il dispose en théorie de 118 boules, mais non de 20 %.

On souligne au passage l'intérêt dans un exercice de revenir au contexte après avoir achevé les calculs (conclure à la question 1 sur le nombre de boules disponibles facilite la réponse à la question 2).

Comme trace écrite on conserve :

- L'expression des volumes.
- Le calcul des contenances
- L'argumentation menant à la solution $(3 ; 2)$, qui constitue la principale phase de l'exercice, et la réponse à la question 2 « il peut augmenter sa production de 18 % au plus » avec sa justification.

3. Exercices complémentaires

Voir REDCM pages 58 à 61.

3. Commentaire

L'exercice du jour est assez long à corriger. Les candidats doivent par conséquent résumer leur correction en ne conservant que l'essentiel.