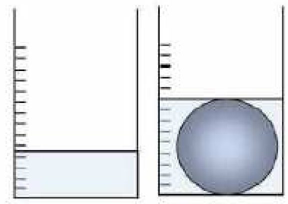
ESD2017_3c04. Prise d'initiative

1. Le sujet

A. Exercice



Un récipient cylindrique de rayon 20cm contient de l'eau jusqu'à une hauteur de 10cm.
« *C'est magique ! En y mettant cette bille, l'eau la recouvre exactement* », annonce le professeur de physique.

Cette situation est-elle possible ?

B. Les réponses de deux élèves de seconde

Elève 1
Je pose R le rayon de la sphère, le volume de départ est 4000π *et le volume avec la bille est* $800R\pi$.

Donc je trouve $\frac{4}{3}\pi R^3 + 4000\pi = 800R\pi$ *mais je ne sais pas comment faire après.*

Élève 2
Je pose x le rayon d'une bille avec $x > 0$.
Le volume d'eau dans le cylindre est $V(x) = 4000\pi + \frac{4}{3}\pi x^3$ *ça donne une hauteur* $h = \frac{V(x)}{400\pi}$
J'ai tracé cette fonction et x sur ma calculatrice mais les fonctions ne se coupent pas, donc ce n'est pas possible.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analyser les productions de chaque élève, en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs éventuelles, ainsi que l'accompagnement que vous pourriez leur proposer pour les aider à progresser.

2. En vous appuyant sur les productions d'élèves, présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

3. Proposez deux problèmes sur le thème *prise d'initiative*. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

2. Eléments de correction

À ma connaissance, le problème de la bille qui affleure l'eau dans laquelle elle est plongée a commencé à apparaître au sein des manuels de lycée dans les années 1980. En raison d'une conclusion quelque peu insolite, ce problème a tout de suite connu le succès auprès des professeurs des classes de première qui cherchaient des problèmes originaux du troisième degré (en application de la dérivation).

Le voici proposé au niveau seconde. À ce niveau, il se présente sous forme de « problème ouvert » et peut faire l'objet d'une activité dirigée en classe :

- L'énoncé, assez court, ne pose pas de problème majeur de compréhension.
- Aucune méthode n'est suggérée, la question « est-ce possible ? » est volontairement peu précise pour donner lieu à plusieurs interprétations.
- Il ne s'agit pas d'appliquer des connaissances directes, les élèves de seconde ne disposent d'aucun outil permettant de résoudre la question de façon experte.

C'est pourquoi il entre dans le thème « prise d'initiative ». Chacun est libre de ses choix, on ne vise pas un résultat à tout prix. De fait, il est quelque peu difficile de proposer un « accompagnement pour aider à progresser » car aucun il apprentissage spécifique n'est visé. Il s'agira simplement de tenter de faire aboutir les démarches.

1. Analyse de travaux d'élèves.

	Elève 1	*Elève 2*
Paramètre permettant de décrire la situation	Rayon de la bille, noté R. Ne précise pas à quel intervalle R peut appartenir.	Rayon de la bille, noté x. Ce paramètre est reconnu comme étant strictement positif.
Caractérisation du recouvrement exact	Il y a recouvrement lorsque le volume d'eau initial augmenté du volume de la bille est égal au volume d'un cylindre de même hauteur que la bille.	Il y a recouvrement lorsque la hauteur d'un cylindre dont le volume est égal au volume d'eau initial augmenté du volume de la bille est le même que la hauteur de la bille.
Modélisation	Par une équation du troisième degré (correcte, réussite).	Par l'intersection de deux courbes représentatives de deux fonctions, une du troisième degré l'autre linéaire (incorrecte, échec). La démarche est cependant intéressante, c'est une piste de résolution.
Erreur principale	Démarche inaboutie par manque de moyens permettant de résoudre l'équation obtenue.	Confond le rayon de la bille et le diamètre de la bille. Cette erreur est rédhibitoire.

Ces deux élèves sont capables d'analyser un problème, de choisir un cadre adapté pour le modéliser et tenter de le résoudre. Il est normal qu'un bon élève de seconde (élève 1) butte sur la résolution d'une équation du troisième degré. L'élève 2 va même un peu plus loin, puisqu'il s'engage dans une résolution graphique.

2. Une correction de l'exercice.

Les deux d'élèves sont d'accord sur le choix du paramètre permettant de décrire la situation, le rayon de la bille. On décide d'une notation, x par exemple. L'élève 1 n'impose aucune contrainte, l'élève 2 impose une contrainte de positivité. Est-ce la seule ? Non, il faut que la bille entre dans le cylindre[1] . On convient d'un intervalle sur lequel le problème a un sens, l'intervalle $]0\,;\,20[$. On peut aussi choisir $[5\,;\,20[$ car si le diamètre de la bille est plus petit que 10, alors la bille sera forcément immergée dans les 10 cm d'eau.

On suit leur démarche, en précisant exactement le sens de ce que l'on calcule. Ainsi, $V(x)=4000\pi+\frac{4}{3}\pi x^3$ représente le volume occupé dans le cylindre par l'eau ET la bille (et non le « volume d'eau » de l'élève 2).

Il s'agit maintenant de caractériser le recouvrement. Il faut donc choisir une des deux variantes.

La variante de l'élève 1, amène à l'équation $\frac{4}{3}\pi x^3+4000\pi=800x\pi$.

Celle de l'élève 2 amène à se demander si l'équation $\frac{x^3}{300}+10=2x$ admet ou non une solution dans l'intervalle $]0\,;\,20[$.

On fait remarquer que les deux équations sont équivalentes. Il s'agit là d'un type d'équation que l'on ne sait pas résoudre algébriquement.

La deuxième équation est un peu moins ésotérique que l'autre. On explicite ce que représentent ses deux membres : $2x$ représente le diamètre de la bille et $\frac{x^3}{300}+10$ représente la hauteur d'un cylindre dont le volume est le même que celui de l'eau ET de la bille.

- Si $\frac{x^3}{300}+10<2x$, la hauteur de ce cylindre est plus petite que le diamètre : la bille émerge.
- Si $\frac{x^3}{300}+10>2x$, la hauteur de ce cylindre est plus grande que le diamètre : la bille est sous l'eau.
- Si $\frac{x^3}{300}+10=2x$, la bille est exactement recouverte.

Il reste à trouver un moyen pour déterminer si le troisième cas se présente ou non.

L'élève 2 propose une idée : associer la résolution de cette équation à la recherche de l'abscisse d'un point d'intersection de deux courbes. (C'est l'occasion de corriger au passage le vocabulaire calamiteux de cet élève). En l'occurrence la courbe représentative de la fonction h définie sur $]0\,;\,20[$ par : $x\mapsto h(x)=\frac{x^3}{300}+10$ et la courbe représentative de la fonction linéaire d définie sur $]0\,;\,20[$ par : $x\mapsto d(x)=2x$

(La variante de l'élève 1, amènerait aux fonctions f définie sur $]0\,;\,20[$ par : $x\mapsto f(x)=4000\pi+\frac{4}{3}\pi x^3$ « volume d'eau augmenté de celui d'une bille de rayon x » et g définie sur $]0\,;\,20[$ par : $x\mapsto g(x)=800\pi x$ « volume d'un cylindre de rayon 20 cm et de même hauteur que la bille »).

[1] Cela me rappelle une méchante blague russe à propos d'un certain peuple sibérien que je ne nomme pas par respect pour eux, peuple qui joue pour les russes le même rôle que les belges pour les français et les français pour les belges :
Pourquoi les … ne font-ils jamais de confiture de pastèque ?
Parce qu'ils ne trouvent pas de bocal assez grand pour la contenir

On représente graphiquement les deux fonctions (« tracer une fonction » n'est pas correct, on rectifie le vocabulaire) et si on met en évidence que les deux représentations graphiques ont un point d'intersection (ce ne sont pas « les fonctions qui se coupent »), alors l'équation $h(x)=d(x)$ a une solution, et le recouvrement exact est possible.

Il revient au même de considérer la fonction différence $e(x)=h(x)-d(x)$ et d'étudier le nombre de solutions dans $]0\ ;\ 20[$ de l'équation $e(x)=0$ soit à l'aide du calcul formel, soit graphiquement.

Comme trace écrite on conserverait :

- Le processus de modélisation (paramètre choisi, intervalle d'étude, équation à laquelle on a abouti).
- Le(s) traitement(s) mathématique(s) (graphique ou formel) de cette équation que l'on a choisi de mener à bien : il ne s'agit pas de *résoudre* l'équation mais de déterminer *l'existence* d'une solution au moins. On fait l'inventaire des fonctionnalités de la calculatrice ou du logiciel que l'on a utilisées.

3. Commentaires

3.1. Je me demande s'il n'est pas un peu dommage de déflorer cette situation au niveau d'une classe de seconde indifférenciée, niveau où beaucoup d'élèves, en carence de culture mathématique établie, n'auront pas les moyens de suivre les calculs que l'on est amené à faire et risquent de décrocher bien avant la phase la plus intéressante de la résolution. De plus, à ce niveau de classe, on n'a aucun moyen efficace pour démontrer ce que « l'on voit sur le graphique », sinon à en appeler à l'intuition[2].

Au niveau d'une classe de première S, on disposera d'outils plus performants qui permettront de viser des objectifs plus ambitieux.

3.2. On notera le fossé abyssal qui sépare ce genre d'exercice-jury, de niveau soutenu et qui fait appel à la culture mathématique générale du candidat, des quelques autres que je me suis permis de clouer au pilori tant leur niveau est consternant. Comme quoi, le niveau varie dans des proportions considérables d'une journée d'oral à une autre.

4. Pour aller plus loin, le même exercice revisité

Un récipient cylindrique de rayon 20cm contient de l'eau jusqu'à une hauteur de *h* cm (*h* réel strictement positif donné).
« *C'est magique ! En y mettant cette bille, l'eau la recouvre exactement* », annonce le professeur de physique. Cette situation est-elle possible ?

Donc, on généralise la hauteur d'eau dans le récipient (récipient supposé aussi haut que nécessaire).
On suit la même démarche, jusqu'à la discussion :

- Si $\frac{x^3}{300}+h<2x$, la hauteur de ce cylindre est plus petite que le diamètre : la bille émerge.
- Si $\frac{x^3}{300}+h>2x$, la hauteur de ce cylindre est plus grande que le diamètre : la bille est sous l'eau.

[2] Le programme de seconde indique : « *Il s'agit d'apprendre aux élèves à distinguer la courbe représentative d'une fonction des dessins obtenus avec un traceur de courbe ... Autrement dit, il s'agit de faire comprendre que des dessins peuvent suffire pour répondre de façon satisfaisante à un problème concret mais qu'ils ne suffisent pas à démontrer des propriétés de la fonction* ». Ici, on est clairement dans le « problème concret » mais pourtant on a besoin d'une propriété de la fonction.

- Si $\frac{x^3}{300}+h=2x$, la bille est exactement recouverte.

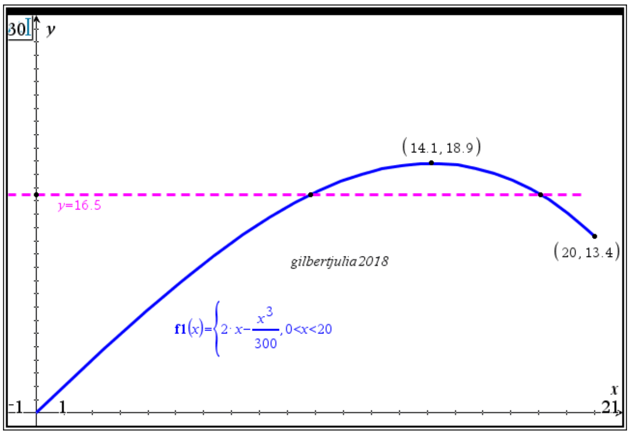
Pour discuter l'existence et le nombre de solutions de l'équation $\frac{x^3}{300}+h=2x$, on est amené à considérer la fonction u définie sur $]0\ ;\ 20[$ par : $u(x)=2x-\frac{x^3}{300}$

Une étude de cette fonction montre que u possède un maximum pour $x=\sqrt{200}$, maximum égal à $\frac{40\sqrt{2}}{3}$.

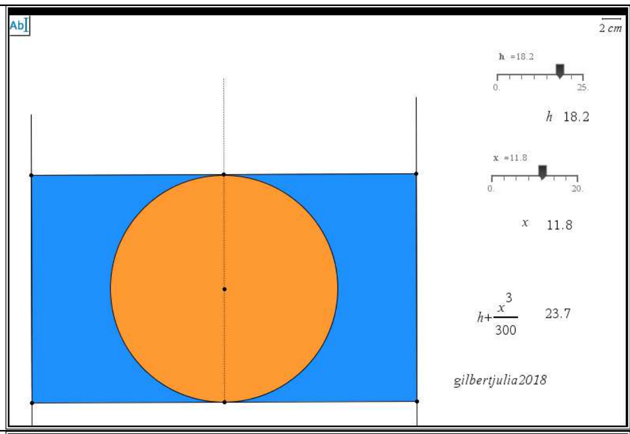
Lorsque $0<h\leq\frac{40}{3}$ l'équation $\frac{x^3}{300}+h=2x$ a une seule solution dans $]0\ ;\ 20[$.

Lorsque $\frac{40}{3}<h<\frac{40\sqrt{2}}{3}$, elle a 2 solutions.

Lorsque $h>\frac{40\sqrt{2}}{3}$, elle n'en a aucune. Ainsi, pour certaines valeurs de h, il existe deux billes différentes qui sont exactement recouvertes.



Une simulation géométrique
Pour les élèves qui douteraient du résultat, on peut proposer une simulation géométrique. Ci-contre on utilise deux curseurs, l'un **h** pour régler la hauteur d'eau initiale dans le récipient et l'autre **x** pour régler le rayon de la bille. Quelques constructions plus tard, on arrive à cette figure dynamique.
Voici, empiriquement, un cas de recouvrement exact.



Et un deuxième cas pour la même valeur de h.

Zip, zap, c'est assez amusant.

J'ignore si on peut faire quelque chose de semblable avec Geogebra, je ne suis pas familier de ce logiciel.

TI-nSpire, que je pratique depuis longtemps, me convient. Un candidat au CAPES doit nécessairement utiliser un logiciel homologué, contrainte à laquelle je ne suis pas tenu.